2020学年第一学期杭州市高三年级教学质量检测

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	B	C	D	B	B	B	D	D

二、填空题：本大题共7小题，多空题每题6分，单空题每题4分，共36分。

11．1，9　　12．$\frac{\pi}{2}$，$2\sqrt{3}$　　13．$\frac{1}{2}$，$\sqrt{2}$　　14．1，1

15．44　　16．$1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　17．$\frac{\sqrt{3}}{12}$

三、解答题：本大题共5小题，共74分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18．（本题满分14分）

（I）因为 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\cos\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x\right)\left(\frac{1}{2}\cos\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x\right)$

$$=\frac{1}{4}\cos^2\omega x-\frac{3}{4}\sin^2\omega x=\frac{1}{4}\times\frac{1+\cos 2\omega x}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1-\cos 2\omega x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2\omega x-\frac{1}{4},$$

因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，即 $\omega=1$.

所以 $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}$，

因为 $\pi+2k\pi\le 2x\le 2\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $\frac{\pi}{2}+k\pi\le x\le \pi+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(k\pi+\frac{\pi}{2},k\pi+\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$.　　…………8分

（II）由 $\sin A\sin C-\sin^2 C=\sin^2 A-\sin^2 B$，得 $ac-c^2=a^2-b^2$，

即 $a^2+c^2-b^2=ac$，

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，又 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore f(B)=-\frac{1}{2}$.　　…………6分

19．（本题满分 15 分）

（I）当 $a=2$ 时，$|x-1|^2-2|x-1|-1<0$，

所以 $0\leqslant|x-1|<1+\sqrt{2}$，

所以 $-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$． …………5 分

（II）因为 $f(x)+1=\begin{cases}x^2-2ax+3，x\geq\frac{2}{a}；\\x^2-1，x<\frac{2}{a}.\end{cases}$

因为 $f(x)+1=0$ 有 4 个不同零点，

所以 $\triangle=4a^2-12>0$ 且 $\frac{2}{a}>1$，解得 $\sqrt{3}<a<2$．

不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $x_1=-1$，$x_2=1$，

若 x_2，x_3，x_4 成等差数列，则 $\begin{cases}2x_3=1+x_4\\x_3+x_4=2a\end{cases}$，所以 $x_3=\frac{2a+1}{3}$，

代入得 $\left(\frac{2a+1}{3}\right)^2-2a\cdot\frac{2a+1}{3}+3=0$， 解得 $a=\frac{7}{4}$ 或 $a=-2$（舍去），

综上可知，存在 $a=\frac{7}{4}$ 符合题意． …………10 分

20．（本题满分 15 分）

（I）连接 BG 交 EC 于 H，连接 FH．

则点 H 为 $\triangle BCD$ 的重心，有 $\frac{BH}{HG}=2$．

因为 $\frac{BF}{FA}=\frac{BH}{HG}=2$，

所以 $FH//AG$，且 $FH\subset$ 平面 CEF，$AG\not\subset$ 平面 CEF，

所以 $AG//$ 平面 CEF． …………7 分

（II）因为 $BF=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$BE=1$，$\angle ABD=30^\circ$，

所以 $EF^2=BF^2+BE^2-2BE\cdot BF\cos\angle ABD=\frac{1}{3}$，

故 $EF^2=BF^2+BE^2$，所以 $EF\perp BD$，且 $CE\perp BD$．

所以 $BD\perp$ 平面 CEF．

过 F 作 AD 的平行线 FP，交 BD 于 P．

则 $PE\perp$ 平面 CEF．

所以直线 FP 与平面 CEF 所成角为 $\angle PFE$．

且 $FP=\frac{2}{3}$，$EP=\frac{1}{3}$，$\angle FEP=90^\circ$，

所以 $\sin\angle PFE=\frac{1}{2}$，得 $\angle PFE=\frac{\pi}{6}$．

所以直线 FP 与平面 CEF 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$，

即直线 AD 与平面 CEF 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$． …………8 分

21.（本题满分 15 分）

（I）由已知，$\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}=q_k^2=4$，所以 $a_{2k-1}=4^{k-1}$，

所以 $a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}=\dfrac{4^k-1}{3}$． …………5 分

（II）①对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$，a_{2k}，a_{2k+1}，a_{2k+2} 成等差数列，

所以 $2a_{2k+1}=a_{2k}+a_{2k+2}$，即 $2=\dfrac{a_{2k}}{a_{2k+1}}+\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}$，即 $2=\dfrac{1}{q_k}+q_{k+1}$，

所以 $\dfrac{1}{q_{k+1}-1}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{q_k}}=\dfrac{1}{q_k-1}+1$，即 $b_{k+1}-b_k=1$，

所以 $\{b_n\}$ 成等差数列，其公差为 1．

②若 $d_1=2$，则 $a_2=q_1,a_3=q_1^2,a_3-a_2=2$，

所以 $q_1^2-q_1-2=0$，又 $q_k>0$，所以 $q_1=2$，

从而 $\dfrac{1}{q_k-1}=\dfrac{1}{q_1-1}+k-1=k$，即 $q_k=1+\dfrac{1}{k}$．

所以 $\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}=\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^2$，可得 $a_{2k-1}=a_1\cdot\dfrac{a_3}{a_1}\cdot\dfrac{a_5}{a_3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_{2k-1}}{a_{2k-3}}=k^2$，

$a_{2k}=a_{2k-1}q_k=k\left(k+1\right)$，$d_k=a_{2k+1}-a_{2k}=\left(k+1\right)^2-k\left(k+1\right)=k+1$，

所以 $D_k=\dfrac{k\left(d_1+d_k\right)}{2}=\dfrac{k\left(k+3\right)}{2}$． …………10 分

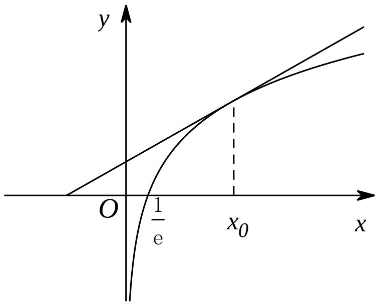
22.（本题满分 15 分）

（I） $f'(x)=\ln x+1-a(x+1),x>0$．

根据题意，$\ln x+1-a(x+1)=0$，即 $\ln x+1=a(x+1)$ 存在两个不同正根．

先考虑 $y=a(x+1)$ 与 $y=\ln x+1$ 相切，记切点横坐标为 x_0，如图．

则 $\begin{cases}a(x_0+1)=\ln x_0+1\\ a=\dfrac{1}{x_0}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ax_0=1\\ x_0\ln x_0=1\end{cases}$



设 $g(x)=x\ln x-1,x>0$，则 $g'(x)=1+\ln x$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$．

故 $y=g(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$ 上单调递增．

且 $g(1)=-1<0,g(2)=\ln 4-1>0$，故存在唯一 $x_0\in(1,2)$，使 $x_0\ln x_0=1$ 成立．

取 $m=\dfrac{1}{x_0}\in(\dfrac{1}{2},1)$，则 $0<a<m$ 时，$f(x)$ 恰存在两个极值点，得证． …………8 分

（II）由（I）知，$f'(x_1)=\ln x_1+1-a(x_1+1)$，且$\frac{1}{\mathrm{e}}<x_1<x_0<2$.

所以$a=\frac{\ln x_1+1}{x_1+1}$，代入$f(x_1)$，得$f(x_1)=\frac{1}{2}(x_1\ln x_1-x_1-\ln x_1-1)$，

设$h(x)=\frac{1}{2}(x\ln x-x-\ln x-1),\frac{1}{\mathrm{e}}<x<2$.

$h'(x)=\frac{1}{2}(\ln x-\frac{1}{x}),\frac{1}{\mathrm{e}}<x<2$，

则容易判断$x\in(\frac{1}{\mathrm{e}},x_0),h'(x)<0$；$x\in(x_0,2),h'(x)>0$.

故$x\in(\frac{1}{\mathrm{e}},x_0),h(x)$单调递减；$x\in(x_0,2),h(x)$单调递增.

所以$h(x_0)<h(x)<\max\{h(\frac{1}{\mathrm{e}}),h(2)\}$.

且$\max\{h(\frac{1}{\mathrm{e}}),h(2)\}=\max\{-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{\ln 2-3}{2}\}=-\frac{1}{\mathrm{e}}$，

由$x_0\ln x_0=1$，且$x_0\in(1,2)$，得$h(x_0)=-\frac{1}{2}(x_0+\frac{1}{x_0})>-\frac{5}{4}$.

所以$-\frac{5}{4}<h(x)<-\frac{1}{\mathrm{e}}$，从而$-\frac{5}{4}<f(x_1)<-\frac{1}{\mathrm{e}}$，证毕.　　　…………7分