一、选择题（本大题共 18 小题，每小题 3 分，共 54 分。每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，不选、多选、错选均不得分。）

1. 已知集合 $A=\{4,5,6\}$，$B=\{3,5,7\}$，则 $A\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $\{5\}$　　C. $\{4,6\}$　　D. $\{3,4,5,6,7\}$

2. 函数 $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x+2}$ 的定义域是

A. $[-3,+\infty)$　　B. $(-3,+\infty)$

C. $[-3,-2)\cup(-2,+\infty)$　　D. $[-3,2)\cup(2,+\infty)$

3. $\log_3 18-\log_3 2=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

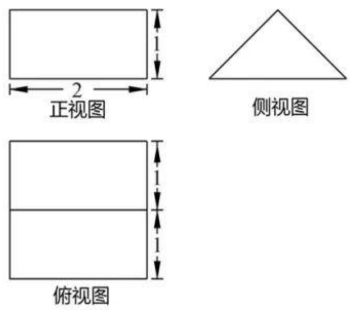
4. 以 $A(2,0)$，$B(0,4)$ 为直径端点的圆方程是

A. $(x+1)^2+(y+2)^2=20$

B. $(x-1)^2+(y-2)^2=20$

C. $(x+1)^2+(y+2)^2=5$

D. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$



（第 5 题图）

5. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是

A. 2　　B. 4

C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

6. 不等式 $2^{|x-1|}<4$ 的解集是

A. $(-1,3)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

C. $(-3,1)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

7. 若实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases}x+y\leqslant 3,\\ x-y\leqslant 1,\\ x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $2x+y$ 的最大值是

A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 6

8. 若直线 $l_1:3x-4y-1=0$ 与 $l_2:3x-ay+2=0(a\in\mathbf{R})$ 平行，则 l_1 与 l_2 间的距离是

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

9. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $2b\sin A=\sqrt{3}a$，则 $B=$

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$

10. 已知平面 α,β 和直线 l，

A. 若 $l//\alpha$，$l//\beta$，则 $\alpha//\beta$　　B. 若 $l//\alpha$，$l\subset\beta$，则 $\alpha//\beta$

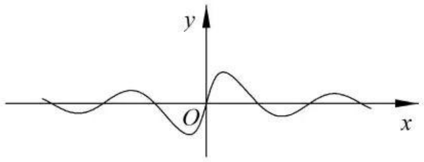
C. 若 $l\perp\alpha$，$l\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　D. 若 $l\perp\alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

11. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$ab\geqslant\frac{1}{4}$”是“$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$”的

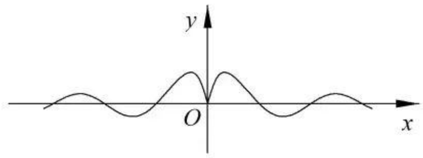
A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

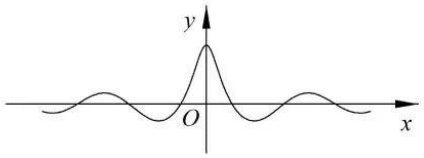
12. 函数 $f(x)=\frac{\sin x}{\ln(x^2+2)}$ 的图象大致是



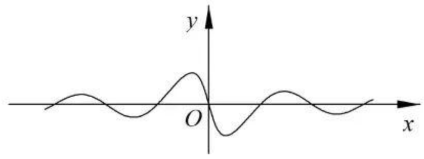
A.



B.



C.



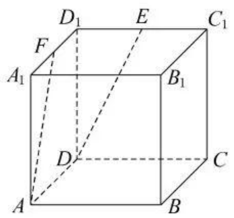
D.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=-2$，$a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则

A. $a_{40}<a_{100}$　　　　B. $a_{40}>a_{100}$

C. $S_{40}<S_{100}$　　　　D. $S_{40}>S_{100}$

14. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 C_1D_1，A_1D_1 的中点，则异面直线 DE 与 AF 所成角的余弦值是

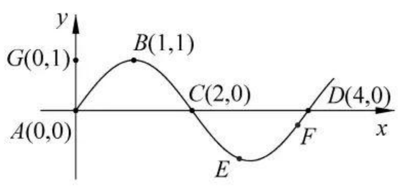


（第 14 题图）

A. $\frac{4}{5}$　　　　B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　　　D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

15. 某简谐运动的图象如图所示. 若 A，B 两点经过 x 秒后分别运动到图象上 E，F 两点，则下列结论不一定成立的是



（第 15 题图）

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GB}$

B. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}>\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AG}$

C. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{GB}$

D. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}>\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AG}$

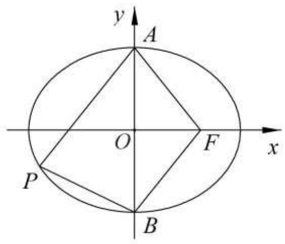
16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x-\frac{1}{x}, x>0,\\ x^2+2x, x\leqslant 0,\end{cases}$ 则函数 $y=f[f(x)+1]$ 的零点个数是

A. 2　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. 5

17. 如图，椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，A，B 分别为椭圆的上、下顶点，P 是椭圆上一点，$AP//BF$，$|AF|=|PB|$，记椭圆的离心率为 e，则 $e^2=$

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{17}-1}{8}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{15}-1}{8}$

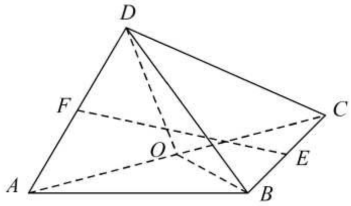


（第 17 题图）

18. 如图，在三棱锥 $D-ABC$ 中，$AB=BC=CD=DA$，$\angle ABC=90^\circ$，E，F，O 分别为棱 BC，DA，AC 的中点，记直线 EF 与平面 BOD 所成角为 θ，则 θ 的取值范围是

A. $(0,\dfrac{\pi}{4})$　　　　B. $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3})$

C. $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$　　　　D. $(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$



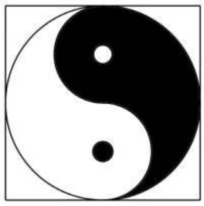
（第 18 题图）

二、填空题（本大题共 4 小题，每空 3 分，共 15 分。）

19. 设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，前 n 项和为 S_n. 若 $a_1=1$，$a_4=64$，则 $q=$ ▲ ，$S_3=$ ▲ .

20. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ ▲ .

21. 如图，正方形内的图形来自中国古代的太极图. 勤劳而充满智慧的我国古代劳动人民曾用太极图解释宇宙现象. 太极图由正方形的内切圆（简称大圆）和两个互相外切且半径相等的圆（简称小圆）的半圆弧组成，两个小圆与大圆均内切. 若正方形的边长为 8，则以两个小圆的圆心（图中两个黑白点视为小圆的圆心）为焦点，正方形对角线所在直线为渐近线的双曲线实轴长是 ▲ .


（第 21 题图）

22. 已知 $a\in\mathbf{R}$，$b>0$，若存在实数 $x\in[0,1)$，使得$|bx-a|\leqslant b-ax^2$ 成立，则$\dfrac{a}{b}$的取值范围是 ▲ .

三、解答题（本大题共 3 小题，共 31 分。）

23.（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{6})$，$x\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求 $f(\dfrac{\pi}{3})$的值；

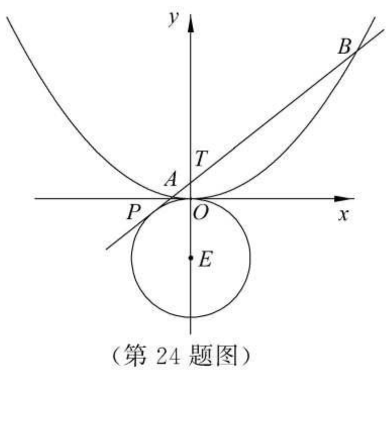
（Ⅱ）求函数 $f(x)$的最小正周期；

（Ⅲ）当 $x\in[0,\dfrac{2\pi}{3}]$时，求函数 $f(x)$的值域.

24.（本题满分 10 分）如图，直线 l 与圆 E：$x^2+(y+1)^2=1$ 相切于点 P，与抛物线 C：$x^2=4y$ 相交于不同的两点 A，B，与 y 轴相交于点 $T(0,t)(t>0)$.

（Ⅰ）若 T 是抛物线 C 的焦点，求直线 l 的方程；

（Ⅱ）若$|TE|^2=|PA|\cdot|PB|$，求 t 的值.



（第 24 题图）

25.(本题满分 11 分)设 $a\in[0,4]$,已知函数 $f(x)=\frac{4x-a}{x^2+1}$,$x\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)若 $f(x)$是奇函数,求 a 的值;

(Ⅱ)当 $x>0$ 时,证明:$f(x)\leqslant\frac{a}{2}x-a+2$;

(Ⅲ)设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,若实数 m 满足 $f(x_1)\cdot f(x_2)=-m^2$,证明:$f(m-a)-f(1)<\frac{1}{8}$.

一、选择题(本大题共 18 小题,每小题 3 分,共 54 分。每小题中只有一个选项是符合题意的,不选、多选、错选均不得分。)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案	B	C	B	D	A	A	C	C	D
题号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
答案	C	A	A	D	A	B	D	B	C

二、填空题(本大题共 4 小题,每空 3 分,共 15 分。)

19.4,21　　　20.$\sqrt{3}$　　　21.$2\sqrt{2}$　　　22.$[-1,\frac{\sqrt{2}+1}{2}]$

三、解答题(本大题共 3 小题,共 31 分。)

23.(Ⅰ)$f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(Ⅱ)$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}\cos(x+\frac{\pi}{6})=\sin(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=\sin(x+\frac{\pi}{3})$,

故 $f(x)$的最小正周期 $T=2\pi$;

(Ⅲ)当 $x\in[0,\frac{2\pi}{3}]$时,$x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\pi]$.

因此当 $x+\frac{\pi}{3}=\pi$,即 $x=\frac{2\pi}{3}$时,$f(x)_{\min}=\sin\pi=0$;

当 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,即 $x=\frac{\pi}{6}$时,$f(x)_{\max}=1$;

所以 $f(x)$在$[0,\frac{2\pi}{3}]$上的值域为$[0,1]$.

24.(Ⅰ)因为 $T(0,t)(t>0)$是抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点,所以

$$t=1.$$

设直线 l 的方程为 $y=kx+1$,由直线 l 与圆 E 相切,得

$$\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}=1,\text{即 } k=\pm\sqrt{3},$$

所以，直线 l 的方程为

$y=\pm\sqrt{3}x+1$.

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $y=kx+t$，$P(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=kx+t,\\x^2=4y,\end{cases}$得 $x^2-4kx-4t=0$，$x_1+x_2=4k$，$x_1\cdot x_2=-4t$，所以

$$\begin{aligned}|PA|\cdot|PB|&=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_0|\cdot\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_0|\\&=(1+k^2)[x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+x_0^2]\\&=(1+k^2)[x_0^2-4(kx_0+t)]\\&=(1+k^2)(x_0^2-4y_0).\end{aligned}$$

由直线 l 与圆 E 相切，得 $\dfrac{|t+1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，即

$$1+k^2=(t+1)^2.$$

由 $|TE|=t+1$，$|TE|^2=|PA|\cdot|PB|$，得

$$(1+k^2)(x_0^2-4y_0)=(t+1)^2.$$

所以 $x_0^2-4y_0=1$，又 $x_0^2+(y_0+1)^2=1$，解得 $y_0=-3+2\sqrt{2}$.

由直线 l 与 PE 互相垂直，得 $k=-\dfrac{1}{k_{PE}}=-\dfrac{x_0}{y_0+1}$，

$$\begin{aligned}t&=y_0-kx_0=y_0+\frac{x_0^2}{y_0+1}\\&=\frac{x_0^2+y_0^2+y_0}{y_0+1}=\frac{-y_0}{y_0+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.\end{aligned}$$

25.（Ⅰ）由题意，对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=-f(x)$，

即 $\dfrac{4(-x)-a}{(-x)^2+1}=-\dfrac{4x-a}{x^2+1}$，亦即 $-4x-a=-4x+a$，因此

$a=0$；

（Ⅱ）证明：因为 $x>0$，$0\leqslant a\leqslant 4$，

$$\begin{aligned}\frac{4x-a}{x^2+1}-\left(\frac{a}{2}x-a+2\right)&=\frac{4x-a-(\frac{a}{2}x-a+2)(x^2+1)}{x^2+1}\\&=-\frac{1}{2(x^2+1)}[ax(x^2-2x+1)+4(x^2-2x+1)]\\&=-\frac{1}{2(x^2+1)}(ax+4)(x-1)^2\leqslant 0.\end{aligned}$$

所以，$f(x)\leqslant\dfrac{a}{2}x-a+2$.

（Ⅲ）设 $t=4x-a$，则 $y=\dfrac{4x-a}{x^2+1}=\dfrac{16t}{t^2+2at+a^2+16}(t\in\mathbf{R})$，

当 $t=0$ 时，$y=0$；

当 $t\neq 0$ 时，$y=\dfrac{16}{t+\dfrac{a^2+16}{t}+2a}$；

$$f(x)_{\max}=\frac{8}{a+\sqrt{a^2+16}}>0,f(x)_{\min}=\frac{8}{a-\sqrt{a^2+16}}<0,$$

所以 $$\frac{8}{a-\sqrt{a^2+16}}\leqslant f(x)\leqslant\frac{8}{a+\sqrt{a^2+16}}.$$

由 $f(x_1)\cdot f(x_2)=-m^2$ 得 $-m^2\geqslant f(x)_{\max}\cdot f(x)_{\min}=-4$，即

$$-2\leqslant m\leqslant 2.$$

①当 $m-a\leqslant 0$ 时，$f(m-a)\leqslant 0$，$f(1)=\dfrac{4-a}{2}\geqslant 0$，所以

$$f(m-a)-f(1)<\frac{1}{8};$$

②当 $m-a>0$ 时，由(Ⅱ)知，

$$f(m-a)-f(1)\leqslant\frac{a}{2}(m-a)-a+2-\frac{4-a}{2}$$

$$=\frac{a}{2}(m-a-1)\leqslant\frac{a}{2}(1-a)\leqslant\frac{1}{8}$$，等号不能同时成立.

综上可知 $f(m-a)-f(1)<\dfrac{1}{8}$.