1：设复数 z 满足 $(1+i)\cdot z=1-7i$，则 z 在复平面内的对应点位于（　　）

A．第一象限　　　B．第二象限　　　C．第三象限　　　D．第四象限

由题意可得 $z=\frac{1-7i}{1+i}=\frac{(1-7i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{1-8i+7i^2}{1-i^2}=\frac{-6-8i}{2}=-3-4i$，所以 z 在复平面内对应点为 $(-3,-4)$，此点位于第三象限，故选 C

2：若集合 $A=\left\{x\left|\frac{x+2}{x-1}\le 0\right.\right\}$，$B=\{x|-1<x<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$[-2,2)$　　　B．$(-1,1]$　　　C．$(-1,1)$　　　D．$(-1,2)$

直接解出 $A=\{x|-2\le x<1\}$，则 $A\cap B=\{x|-1<x<1\}$，故选 C

3：在 ΔABC 中，$\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{DC}$，则 $\overline{AD}=$（　　）

A．$\frac{1}{4}\overline{AB}+\frac{3}{4}\overline{AC}$　　　B．$\frac{2}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}$　　　C．$\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{2}{3}\overline{AC}$　　　D．$\frac{1}{3}\overline{AB}-\frac{2}{3}\overline{AC}$

由题意可知 $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{BC}=\overline{AB}+\frac{1}{3}(\overline{AC}-\overline{AB})=\frac{2}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}$，故选 B

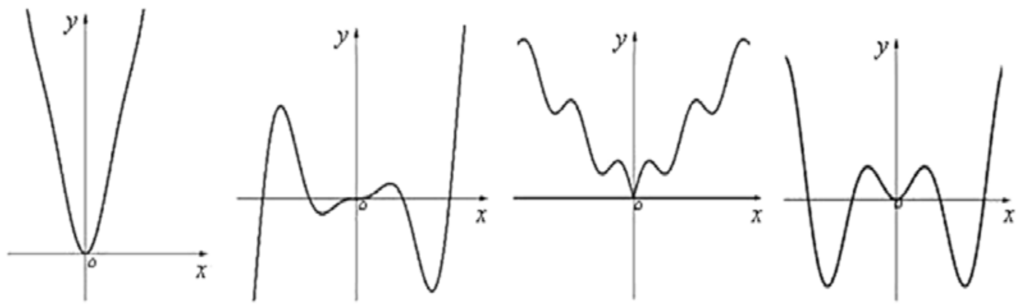
4：将函数 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})-1$ 的图像上各点横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变）得到函数 $g(x)$ 的图像，则下列说法正确的是（　　）

A．函数 $g(x)$ 的图像关于点 $(-\frac{\pi}{12},0)$ 对称　　　B．函数 $g(x)$ 的周期是 $\frac{\pi}{2}$

C．函数 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{6})$ 上单调递增　　　D．函数 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{6})$ 上最大值为 1

由题意可知 $g(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})-1$。函数 $g(x)$ 的图像的对称中心为 $(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},-1)$，所以 A 错误。函数 $g(x)$ 最小正周期为 π，所以 B 错误。函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$ $(k\in Z)$，所以 C 正确。函数 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{6})$ 上没有最大值，所以 D 错误。故选 C

5：函数 $f(x)=x^2+x\cdot\sin x$ 的图像大致为（　　）



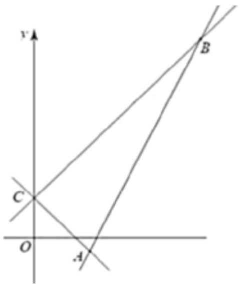
A　　　B　　　C　　　D

由 $f(-x)=f(x)$ 可知，$f(x)$ 是偶函数，其图像关于 y 轴对称，排除 **B**。由于偶函数图像关于 y 轴对称，我们可以只研究 $(0,+\infty)$ 上的图像就可以。令 $g(x)=x+\sin x$，则 $f(x)=x\cdot g(x)$。$g'(x)=1+\cos x$，可得到 $g'(x)\geq 0$ 成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增并且 $g(0)=0$，$g(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上成立。所以 $f(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 成立，排除 **D**。由 $f'(x)=g(x)+x\cdot g'(x)$，可以得出 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 成立，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。故选 **A**

6：在 $\begin{cases}2x-y-6\leq 0\\x-y+2\geq 0\\x+y\geq 2\end{cases}$ 的条件下，目标函数 $z=ax+by\left(a>0,b>0\right)$ 的最大值为 40，则 $\frac{5}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值是（　　）

A. $\frac{7}{4}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 2

解析：画图+基本不等式



画出可行域如右图所示，则可知经过点 $B(8,10)$ 时，此时目标函数达到最大值，则 $z_{\max}=8a+10b=40$，即 $4a+5b=20$，则

$$\frac{5}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{20}(4a+5b)\left(\frac{5}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{20}\left(25+\frac{25b}{a}+\frac{4a}{b}\right)$$

$$\geq\frac{1}{20}\left(25+2\sqrt{25\cdot 4}\right)=\frac{9}{4}$$，故选 B.

7：若 $(1-x)^{2009}=a_0+a_1(x+1)+\cdots+a_{2019}(x+1)^{2019}$，$x\in R$，则 $a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\cdots+a_{2019}\cdot 3^{2019}$ 的值为（　　）

A. $-1-2^{2019}$　　B. $-1+2^{2019}$　　C. $1-2^{2019}$　　D. $1+2^{2019}$

令 $x=-1$，则 $a_0=2^{2009}$，令 $x=2$，则 $-1=a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\cdots+a_{2019}\cdot 3^{2019}$，

则 $a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\cdots+a_{2019}\cdot 3^{2019}=-1-2^{2019}$，故选 A.

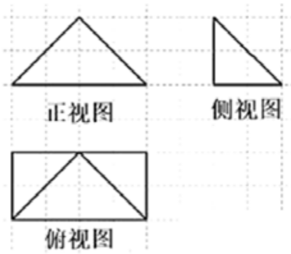
8：某部队在一次军演中要先后执行六项不同的任务，要求是：任务 A 必须排在前三项执行，且执行任务 A 之后需立即执行任务 E，任务 B 、任务 C 不能相邻，则不同的执行方案共有（　　）

A. 36 种　　**B.** 44 种　　**C.** 48 种　　**D.** 54 种

分三类：① A 是第一个任务时共有 $A_2^2A_3^2=12$ 种方案，② A 是第二个任务时共有 $A_2^2A_2^2+C_3^1A_2^2A_2^2=16$ 种方案，③ A 是第三个任务时共有 $C_2^1C_2^1A_2^2A_2^2=16$ 种方案，所以共有 $12+16+16=44$ 种不同的方案，故选 **B**

9：如图，正方形网格纸中的实线图形是一个多面休的三视图，则该多面体各表面所在平面互相垂直的有（　　）

A. 2对　　**B.** 3对　　**C.** 4对　　**D.** 5 对



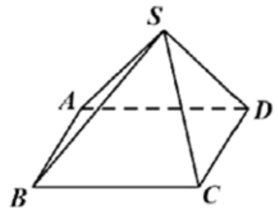
解析 1：

还原三视图，可得原几何体为四棱锥 $S-ABCD$ ，其中 $SA\perp SD$ ，

底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$ ， 互相垂直的平面共有 4 对，

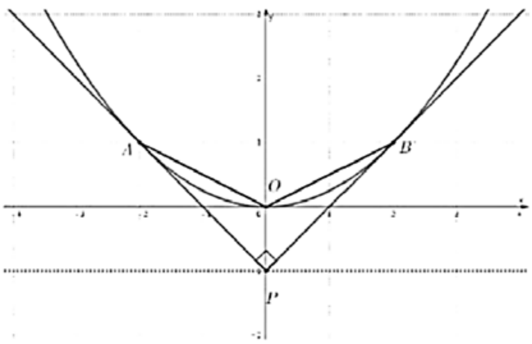
分别是平面 SAD $\perp$ 与平面 SAB ，平面 SAD $\perp$ 平面 SCD，

平面 SAD $\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $SAB\perp$ 平面 SCD，故选 **C**



10.已知抛物线 $C:x^2=4y$，过抛物线 C 上两点 A,B 分别作抛物线的两条切线 PA，PB，P 为两切线的交点，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则直线 OA 与 OB 的斜率之积为（　　）

A. $-\dfrac{1}{4}$　　**B.** -3　　**C.** $-\dfrac{1}{8}$　　**D.** -4



答案为定值，取特殊情况，P 在原点正下方时，有 $\angle APB=90^\circ$，此时 $\angle APO=\angle BPO$

$=45^\circ$，故 $k_{PA}=-1$，$k_{PB}=1$。求导或者联立直线与抛物线计算可得 $A(-2,1)$，$B(2,1)$，故 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\dfrac{1}{4}$

11：设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=3$，$S_4=16$，则数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=$________，通项公式 $a_n=$________.

解析：由题意可得 $\begin{cases}a_2=a_1+d=3\\S_4=4a_1+6d=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，故 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$，故填 $2,2n-1$.

12：若 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos\alpha=$________，$\cos 2\alpha+\cos\alpha=$________.

由诱导公式得：$\cos\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{1}{3}$，

由二倍角公式得：$\cos2\alpha+\cos\alpha=2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=-\dfrac{4}{9}$. 故填$\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{9}$.

13：双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左焦点$F_1\left(-2,0\right)$，点$A\left(0,\sqrt{5}\right)$，点为双曲线右支上的动点，且$\Delta APF_1$周长的最小值为8，则双曲线的实轴长为________，离心率为________.

解析：设双曲线右焦点为F_2，所以ΔAPF_1周长$=AF_1+AP+PF_1=AF_1+AP+PF_2+2a$.

当A,P,F_2三点共线时，ΔAPF_1周长有最小值，因为$AF_1=AF_2=3$，所以周长最小值为$6+2a=8$.

所以$a=1$，则双曲线的实轴长为2，离心率$e=\dfrac{c}{a}=2$. 故填$2,2$.

14：某陶瓷厂准备烧制甲、乙、丙三件不同的工艺品，制作过程必须先后经过两次烧制，当第一次烧制合格后方可进入第二次烧制，再次烧制过程相互独立．根据该厂现有的技术水平，经过第一次烧制后，甲、乙、丙三件产品合格率依次为0.5、0.6、0.4，经过第二次烧制后，甲、乙、丙三件产品合格率的概率依次为0.6、0.5、0.75；则第一次烧制后恰有一件产品合格的概率为________；经过前后两次烧制后，合格工艺品的件数为ξ，则随机变量ξ的期望为__________.

第一空：$P=0.5\cdot(1-0.6)\cdot(1-0.4)+(1-0.5)\cdot0.6\cdot(1-0.4)+(1-0.5)\cdot(1-0.6)\cdot0.4=0.38$

第二空：两次烧制后，甲产品合格的概率为0.3，乙产品合格的概率为0.3，丙产品合格的概率为0.3

$P(\xi=0)=(1-0.3)^3=0.343$，$P(\xi=1)=C_3^1\cdot0.3\cdot(1-0.3)^2=0.441$，$P(\xi=2)=C_3^2\cdot0.3^2\cdot(1-0.3)=0.189$

$P(\xi=3)=(0.3)^3=0.027$. 则$E(\xi)=0\times0.343+1\times0.441+2\times0.189+3\times0.027=0.9$

故填0.38，0.9

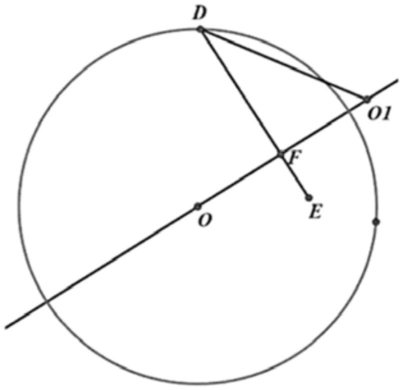
15：若$a+b\neq0$，则$a^2+b^2+\dfrac{1}{(a+b)^2}$的最小值为__________.

$$a^2+b^2+\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2\right)+\frac{1}{(a+b)^2}\geqslant\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+ab+\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{1}{(a+b)^2}\geqslant\sqrt{2}$$

当$\begin{cases}a=b\\\dfrac{(a+b)^2}{2}=\dfrac{1}{(a+b)^2}\end{cases}$时，即$a=b=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$或$a=b=-\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$时，取到最小值，故填$\sqrt{2}$

16：已知半径为4的球面上有两点A,B，$AB=4\sqrt{2}$，球心为O，若球面上的动点C满足二面角$C-AB-O$的大小为$60°$，则四面体$OABC$的外接球半径为__________

解析：



过球心作与 AB 垂直的截面圆 O，与 AB 交于点 E，过直线 AB 作截面 α，与截面圆交于点 D，此时截面 α 与球面相交部分为圆，设圆心为 F，则由已知可得点 C 轨迹即为圆 F 的一部分（在平面 OAB 的上方）。此时，由于 $OF\perp$ 面OAB，则四面体 $OABC$ 的外接球球心一定在直线 OF 上，这里不妨设为点 O_1，如图，可知 $OE=2\sqrt{2}$，$OF=\sqrt{6}$，$DE=\sqrt{10}$，设四面体 $OABC$ 的外接球半径为 r，则由垂径定理，有 $r^2=O_1F^2+DF^2$，即

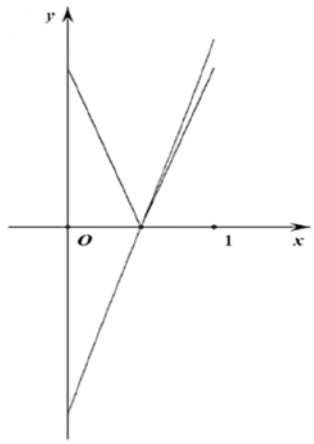
$r^2=\left(r-\sqrt{6}\right)^2+10$，解得 $r=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，所以四面体 $OABC$ 的外接球半径为 $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

17：函数 $f(x)=e^x-e^{1-x}-b|2x-1|$ 在 $(0,1)$ 内有两个零点，则实数 b 的取值范围是_________.

题意即方程 $e^x-e^{1-x}=b|2x-1|$ 在 $(0,1)$ 内有两个不等实根，设 $g(x)=e^x-e^{1-x}$，$h(x)=b|2x-1|$，且 $g\left(\frac{1}{2}\right)=h\left(\frac{1}{2}\right)=0$，所以函数 $g(x)$ 与函数 $h(x)$ 的图象在 $(0,1)$ 内恰有一个横坐标不等于 $\frac{1}{2}$ 的交点，而函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$g(0)=-g(1)=1-e$，函数 $h(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称的 V 型图，

由对称性，只需考虑 $b>0$ 的情形：

解法 1：



设切点为 $(x_0,y_0)\left(x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)\right)$，由 $\begin{cases}e^{x_0}+e^{1-x_0}=2b\\e^{x_0}-e^{1-x_0}=2bx_0-b\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{2}\\b=\sqrt{e}\end{cases}$，

所以 $b>\sqrt{e}$，

又 $h(1)<g(1)$，得 $b<e-1$，所以 $b\in\left(1-e,-\sqrt{e}\right)\cup\left(\sqrt{e},e-1\right)$.

18：在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin A\sin\mathrm{B}=2c\sin\mathrm{C}$，$\triangle ABC$ 的面积 $S=abc$；

（Ⅰ）求角 C

（Ⅱ）求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围

（1）由 $S=abc=\frac{1}{2}ab\sin C$，可知 $2c=\sin C$

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B+\sin A\sin B=\sin^2 C$

由正弦定理得 $a^2+b^2+ab=c^2$

由余弦定理得 $\cos C=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow C=\frac{2\pi}{3}$

（2）由（1）得 $2c=\sin C$

$\therefore 2a=\sin A$，$2b=\sin B$

$\therefore C_{\Delta ABC}=a+b+c=\frac{1}{2}(\sin A+\sin B+\sin C)$

$=\frac{1}{2}\left[\sin A+\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right)\right]+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{1}{2}\left(\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{1}{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\because A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$

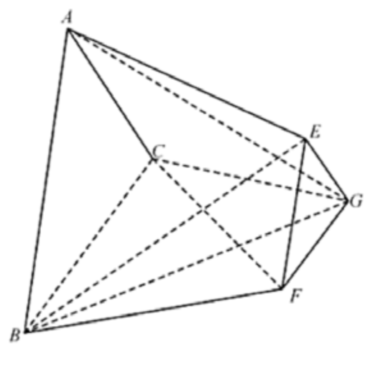
$\therefore \sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

$\therefore \triangle ABC$ 周长的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right]$

19：如图，三棱台 $ABC-EFG$ 的底面是正三角形，平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGF$，$CB=2GF$，$BF=CF$.

（Ⅰ）求证：$AB\perp CG$；

（Ⅱ）若 $BC=CF$，求直线 AE 与平面 BEG 所成角的正弦值.



（1）解析 1:

第（1）小题 取 **BC** 的中点为 **D**，连结 **DF.**

由 $ABC-EFG$ 是三棱台得，平面 **ABC//** 平面 **EFG**，从而 $BC/\!/FG$.

$\because CB=2GF$，$\therefore CD\underline{/\!/}GF$，

∴四边形 **CDFG** 为平行四边形，$\therefore CG/\!/DF$.

$\because BF=CF$，**D** 为 **BC** 的中点，

$\therefore DF\perp BC$，$\therefore CG\perp BC$.

∵平面 $ABC\perp$ 平面 **BCGF**，且交线为 **BC**，$CG\subset$ 平面 **BCGF**，

∴**CG**⊥平面 **ABC**，而 $AB\subset$ 平面 **ABC**，

$\therefore CG\perp AB$.

（2）解析 1：

第（2）小题 连结 AD.

由 $\triangle ABC$ 是正三角形，且 D 为中点得，$AD \perp BC$.

由(Ⅰ)知，$CG\perp$平面 ABC，$CG // DF$，

$\therefore DF \perp AD$，$DF \perp BC$，

$\therefore DB$，DF，DA 两两垂直.

以 DB，DF，DA 分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.

设 $BC=2$，则 $A\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，$E\left(-\frac{1}{2},\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B(1,0,0)$，$G\left(-1,\sqrt{3},0\right)$

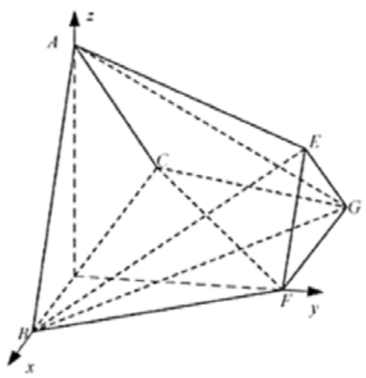
$\therefore \overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BG}=\left(-2,\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{3}{2},\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面 BEG 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BG}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$ 可得，$\begin{cases}-2x+\sqrt{3}y=0\\ -\frac{3}{2}x+\sqrt{3}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$.

令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=2$，$z=-1$，$\therefore \vec{n}=\left(\sqrt{3},2,-1\right)$.

设 AE 与平面 BEG 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AE},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{\sqrt{6}}{4}$



.

20：已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{3}a_n+n,\ n\text{为奇数};\\ a_n-3n,\ n\text{为偶数}.\end{cases}$.

（1）求证：数列 $\left\{a_{2n}-\frac{3}{2}\right\}$ 是等比数列；

（2）若 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求满足 $S_n>0$ 的所有正整数 n.

（1）解析：（构建整体数列）

$$\frac{a_{2n+2}-\frac{3}{2}}{a_{2n}-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1}{3}a_{2n+1}+2n+1-\frac{3}{2}}{a_{2n}-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1}{3}(a_{2n}-6n)+(2n+1)-\frac{3}{2}}{a_{2n}-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1}{3}a_{2n}-\frac{1}{2}}{a_{2n}-\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$$

所以$\left\{a_{2n}-\frac{3}{2}\right\}$是首项为$a_2-\frac{3}{2}=-\frac{1}{6}$，公比为$\frac{1}{3}$的等比数列，

则$a_{2n}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^{n-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{3^n}\Rightarrow a_{2n}=-\frac{1}{2}\frac{1}{3^n}+\frac{3}{2}$.

（2）解析：（奇偶项合并求和+最值问题）

由$a_{2n}=\frac{1}{3}a_{2n-1}+2n-1$，得$a_{2n-1}=3a_{2n}-3(2n-1)=-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}-6n+\frac{15}{2}$，

则$a_{2n-1}+a_{2n}=-\frac{1}{2}\left[(\frac{1}{3})^{n-1}+(\frac{1}{3})^n\right]-6n+9=-2(\frac{1}{3})^n-6n+9$，

所以$S_{2n}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})=-2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right]-6(1+2+\cdots+n)+9n$

$$=-2\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}-6\frac{n(n+1)}{2}+9n=\frac{1}{3^n}-1-3n^2+6n=\frac{1}{3^n}-3(n-1)^2+2$$

当$n\in\mathbf{N}^*$，显然$\{S_{2n}\}$单调递减，

当$n=1$时，$S_2=\frac{7}{3}>0$，满足；$n=2$时，$S_4=-\frac{8}{9}<0$，所以$n\geq 2$时，$S_{2n}<0$，不满足

又$S_{2n-1}=S_{2n}-a_{2n}=\frac{3}{2}\frac{1}{3^n}-\frac{5}{2}-3n^2+6n$，

同理，当且仅当$n=1$时，$S_{2n-1}>0$，

综上所述，满足$S_n>0$的所有正整数n为1和2.

21. 设椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过$M(2,\sqrt{2}),N(\sqrt{6},1)$两点，$O$为坐标原点。

（1）求椭圆E的方程；

（2）是否存在圆心在原点的圆，使得该圆的任意一条切线与椭圆E恒有两个交点A,B，且$OA\perp OB$？若存在，写出该圆的方程；若不存在，请说明理由。

解析：法一（1）因为椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过$M(2,\sqrt{2}),N(\sqrt{6},1)$两点，所以

$$\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1\\ \frac{6}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}\therefore\begin{cases}a^2=8\\ b^2=4\end{cases}$$，椭圆$E:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

（2）.假设存在圆心在原点的圆，使得该圆的任意一条切线与椭圆E恒有两个交点A,B,且$OA\perp OB$,

①圆的切线斜率存在时，设直线方程为$y=kx+m$

联立方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=kx+m\end{cases}\therefore(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-8=0,\therefore\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}\\ x_1x_2=\frac{2m^2-8}{1+2k^2}\end{cases}$

$\Delta=16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-8)=8(8k^2-m^2+4)>0$ 即$8k^2-m^2+4>0$

$$y_1y_2=(k_1x+m)(k_2x+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=k^2\frac{2m^2-8}{1+2k^2}-km\frac{4km}{1+2k^2}+m^2=\frac{m^2-8k^2}{1+2k^2}$$

又$OA\perp OB$,则$x_1x_2+y_1y_2=0$,即$\frac{2m^2-8}{1+2k^2}+\frac{m^2-8k^2}{1+2k^2}=0\therefore3m^2-8k^2-8=0,\therefore k^2=\frac{3m^2-8}{8}\geq0,$

又$8k^2-m^2+4>0$，则$\begin{cases}m^2>2\\ 3m^2\geq8\end{cases}\therefore m^2\geq\frac{8}{3},\therefore m\geq\frac{2\sqrt{6}}{3}$或$m\leq-\frac{2\sqrt{6}}{3}.$

又因为直线$y=kx+m$为圆心在原点的圆的一条切线，所以圆的半径为

$$r=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}},r^2=\frac{m^2}{1+k^2}=\frac{m^2}{1+\frac{3m^2-8}{8}}=\frac{8}{3},r=\frac{2\sqrt{6}}{3},$$

所求的圆为$x^2+y^2=\frac{8}{3}$,此时圆的切线$y=kx+m$都满足$m\geq\frac{2\sqrt{6}}{3}$或$m\leq-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

②当圆的切线斜率不存在时，切线方程为$x=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$与椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$的两个交点为（$\frac{2\sqrt{6}}{3},\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$）

或（$-\frac{2\sqrt{6}}{3},\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$）满足$OA\perp OB$,

综上，存在圆心在原点的圆$x^2+y^2=\frac{8}{3}$,使得该圆的任意一条切线与椭圆E恒有两个交点A,B,且$OA\perp OB$.

22．（本小题满分 15 分）已知函数 $f(x)=a(x+1)\ln(x+1)-x^2-ax(a>0)$ 是减函数。

(Ⅰ)试确定 a 的值。

(Ⅱ)已知数列 $\{a_n\}$，$a_n=\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$，$T_n=a_1a_2a_3\cdots a_n\left(n\in N^*\right)$，求证：$\ln[(n+2)T_n]<1-\dfrac{n}{2}$。

(Ⅰ)解析：

方法一：本题先由导数 $f'(x)\le 0$，构造新函数 $g(x)=a\ln(x+1)-2x$ 再次通过导数方法求得新函数 $g(x)$ 的单调性，配合 $g(0)=0$，从而只能转折点 $\dfrac{a}{2}-1$ 与 0 重合，得到 a 的值。参变分离在这道题里面只能借助于超纲的洛必达法则处理，不建议。

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，　$f'(x)=a\ln(x+1)-2x$

由 $f(x)$ 是减函数有，对任意的 $x\in(-1,+\infty)$，都有 $f'(x)=a\ln(x+1)-2x\le 0$ 恒成立

设 $g(x)=a\ln(x+1)-2x$．

$\because g'(x)=\dfrac{-2[x-(\frac{a}{2}-1)]}{x+1}$，由 $a>0$ 知，$\dfrac{a}{2}-1>-1$，

$\therefore$ 当 $x\in(-1,\dfrac{a}{2}-1)$ 时，导函数 $g'(x)>0$；当 $x\in(\dfrac{a}{2}-1,+\infty)$ 时，导函数 $g'(x)<0$，

即 $g(x)$ 在 $(-1,\dfrac{a}{2}-1)$ 上单调递增，在 $(\dfrac{a}{2}-1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)$ 在 $x=\dfrac{a}{2}-1$ 时取到最大值。

又 $\because g(0)=0$，对任意的 $x\in(-1,+\infty)$，$g(x)\le g(0)$ 恒成立，即 $g(x)$ 的最大值为 $g(0)$

$\therefore \dfrac{a}{2}-1=0$，解得 $a=2$。

（Ⅱ）解析：本题拆分出 $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{n+2}{n+1}$ 出是关键，由于转折点的问题，还要特别验证 **n=1** 时的情况。

由 $f(x)$ 是减函数，且 $f(0)=0$ 可得，当 $x>0$ 时，$f(x)<0$，

$\therefore f(n)<0$，即 $2(n+1)\ln(n+1)<n^2+2n$。

两边同时除以 $2(n+1)^2$ 得 $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{n+2}{n+1}$，即 $a_n<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{n+2}{n+1}$。

从而 $T_n=a_1a_2a_3\cdots a_n<\dfrac{1}{2^n}(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{n}{n+1})(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\dfrac{n+2}{n+1})=\dfrac{1}{2^{n+1}}\dfrac{n+2}{n+1}$

所以 $\ln[(n+2)T_n]<\ln[\dfrac{(n+2)^2}{2^{n+1}(n+1)}]=2\ln(n+2)-\ln(n+1)-(n+1)\ln 2$ ①

下面证 $2\ln(n+2)-\ln(n+1)-(n+1)\ln 2+\dfrac{n}{2}-1<0;$

记 $h(x)=2\ln(x+2)-\ln(x+1)-(x+1)\ln 2+\dfrac{x}{2}-1<0, x\in[1,+\infty)$，

$h'(x)=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}-\ln 2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{x^2+3x+2}-\ln 2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x+\frac{2}{x}+3}-\ln 2+\dfrac{1}{2},$

$\because y=x+\frac{2}{x}$在$[2,+\infty)$上单调递增

$\therefore h'(x)$在$[2,+\infty)$上单调递减，而$h'(2)=\frac{1}{6}-\ln 2+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(2-\ln 8)<0$，

所以当$x\in[2,+\infty)$时，$h'(x)<0$恒成立.

$\therefore h(x)$在$[2,+\infty)$上单调递减，即$x\in[2,+\infty)$时$h(x)<h(2)=2\ln 4-\ln 3-3\ln 2=\ln 2-\ln 3<0$，

所以当$n\geq 2$时，$h(n)<0$。

$\because h(1)=2\ln 3-\ln 2-2\ln 2-\frac{1}{2}=\ln\frac{9}{8}-\ln\sqrt{e}<0$

所以当$n\in N^{*}$时，$h(n)<0$，即$2\ln(n+2)-\ln(n+1)-(n+1)\ln 2<1-\frac{n}{2}$②

综上①②可得，$\ln[(n+2)T_n]<1-\frac{n}{2}$.