2020年浙江省新高考信息优化卷参考答案

数　学

优化卷(一)

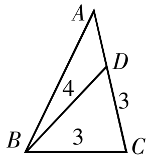
一、选择题

1. C【解析】$U=\{-2,-1,0,1\}$，$\therefore \complement_U A=\{-2,-1,0\}$，$\therefore$ 选 C.

2. B【解析】由已知可知双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-y^2=\lambda$，$\therefore e=\sqrt{10}$ 或 $e=\frac{\sqrt{10}}{3}$，$\therefore$ 选 B.

3. C【解析】根据约束条件画出可行域，注意题中 x,y 是整数的条件，由图可知最优解为$(-1,1)$，$\therefore x^2+y^2-4x$ 的最大值为 6，$\therefore$ 选 C.

4. A【解析】由已知可知$\triangle ABC$ 的图象如图所示，由余弦定理得：$\cos\angle DBC=\frac{2}{3}$，$\therefore \cos\angle ABD=\cos(60°-\angle DBC)=\frac{2+\sqrt{15}}{6}$，$\therefore$ 选 A.



第 4 题图

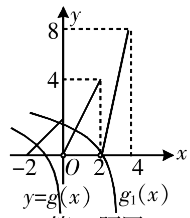
5. B【解析】若 $a+b>4$，则 $b>4-a$，$\therefore ab>a(4-a)$，不能推出 $ab>4$，反例 $a=1,b=4$. 反过来，若 $ab>4$，则 $b>\frac{4}{a}$，$a+b>a+\frac{4}{a}\geqslant 4$，$\therefore a+b>4$. 综上所述，“$a+b>4$”是“$ab>4$”的必要不充分条件，$\therefore$ 选 B.

6. D【解析】要分析 $f(x)$的图象，如果只从正负角度看图象，平方只改变负数部分，即 x 轴以下部分，$\therefore$ 只需分析 $g(x)=3^{ax}-b$ 的图象即可，$g(x)$的图象由 $y=3^x$ 变换而来，从 y 轴左侧趋势分析易得 $b>1$. 当 $x=1$ 时，$g(1)=3a-b>0$，$\therefore a>0$，$\therefore$ 选 D.

7. D【解析】当 $i=1$ 时，$E(\xi_1)=1\cdot\frac{n-m}{n}+2\cdot\frac{m}{n}=1+\frac{m}{n}$，$p_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-m}{n}+1\cdot\frac{m}{n}=\frac{1}{2}+\frac{m}{2n}$. 当 $i=2$ 时，$E(\xi_2)=1\cdot\frac{C_{n-m}^2}{C_n^2}+2\cdot\frac{C_{n-m}^1C_m^1}{C_n^2}+3\cdot\frac{C_m^2}{C_n^2}=1+\frac{2m}{n}$，$p_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{C_{n-m}^2}{C_n^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{C_{n-m}^1C_m^1}{C_n^2}+1\cdot\frac{C_m^2}{C_n^2}=\frac{1}{3}+\frac{2m}{3n}$. $\because E(\xi_1)-E(\xi_2)=-\frac{m}{n}<0$，$p_1-p_2=\frac{1}{6}-\frac{m}{6n}>0$，$\therefore p_1>p_2$，$E(\xi_1)<E(\xi_2)$，$\therefore$ 选 D.

8. A【解析】BP 与平面 AMC 所成的角即$\angle BPM$，而 $30°\leqslant\angle BPM\leqslant 90°$，①正确；过 B 作 $BE\perp AP$ 于 E，连接 ME，则$\angle BEM$ 就是平面 ABP 与平面 AMC 所成的角，当点 P 位于点 C 处时，$\angle BEM$ 最小，此时 $\sin\angle BEM=\frac{BM}{BE}=\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{1}{2}$，$\therefore\angle BEM>30°$，②错误，$\therefore$ 选 A.

9. B【解析】设 $g(x)=\log_2(a-x)$，要使函数 y 恰有两个零点，则函数 $f(x)$的图象与函数 $g(x)$的图象恰有两个交点，函数 $f(x)$的图象如图，要使 $g(x)$的图象与 $f(x)$有两个交点，则函数 $\log_2(-x)$要向右平移至少 1 个单位，数形结合可得：$1<a\leqslant 3$ 或 $4<a\leqslant 18$. $\therefore$ 选 B.



第 9 题图

10. D【解析】若 a_n 恒为正，则由 $a_{n+3}=|a_{n+2}|-a_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=(|a_{n+1}|-a_n)-a_{n+1}=-a_n<0$，矛盾，$\therefore$A 错. 若 a_n 恒为负，则 $a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n>0$，矛盾. $\therefore$B 错. 由上述可知，存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使 $a_m=-a<0$，$a_{m+1}=b>0$，$\therefore a_{m+2}=|a_{m+1}|-a_m=b+a$；$a_{m+3}=|a_{m+2}|-a_{m+1}=a$；$a_{m+4}=|a_{m+3}|-a_{m+2}=-b$；$a_{m+5}=|a_{m+4}|-a_{m+3}=b-a$. ①若 $b\geqslant a$，则有 $a_{m+6}=|a_{m+5}|-a_{m+4}=2b-a$；$a_{m+7}=|a_{m+6}|-a_{m+5}=2b-a-(b-a)=b$；$a_{m+8}=|a_{m+7}|-a_{m+6}=b-(2b-a)=a-b$；$a_{m+9}=|a_{m+8}|-a_{m+7}=b-a-b=-a$；$a_{m+10}=|a_{m+9}|-a_{m+8}=a-(a-b)=b$. ②若 $a>b$，同理可得 $a_{m+9}=-a$，$a_{m+10}=b$. 综上总有 $a_{m+9}=a_m$，$a_{m+10}=a_{m+1}$，$\therefore$ 对一切 $m\in\mathbf{N}^*$，当 $n\geqslant m$ 时，恒有 $a_{n+9}=a_n$. $\therefore$ 选 D.

二、填空题

11. $-\frac{1}{5}$【解析】$z=\frac{2}{3+i}=\frac{2(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{3}{5}-\frac{i}{5}$，$\therefore$ 虚部为$-\frac{1}{5}$.

12. $t\leqslant -1$ 或 $t\geqslant 2$　4【解析】圆心$(0,0)$到直线 $x+y=2$ 的距离为$\sqrt{2}$，要使直线与圆有公共点，则 $t^2-t\geqslant 2$，解得：$t\leqslant -1$ 或 $t\geqslant 2$. 又$-4t-t^2=-(t+2)^2+4$，当 $t=-2$ 时，最大值为 4.

13. 4　24【解析】$T_3=C_n^2(\frac{1}{x})^{n-2}(2x)^2=4C_n^2x^{4-n}$，$\therefore$ 要使第三项是常数，$n=4$，此时 $T_3=4C_4^2=24$.

14. $8+2\sqrt{6}$　$\frac{4}{3}$【解析】该几何体由两个形状大小一样的三棱锥组成，其中三棱锥的底边是边长分别为 1 和 2 的直角三角形，三棱锥的高为 2，$\therefore$ 表面积 $S=2\times\frac{1}{2}(1\times2+1\times2+2\times2+2\sqrt{2}\times\sqrt{3})=8+2\sqrt{6}$，体积 $V=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times2=\frac{4}{3}$.

15. $(-\frac{4}{3},\frac{4}{3})$【解析】设椭圆 C 上任意一点 $M(3\cos\theta,\sqrt{5}\sin\theta)$，则$|PM|=\sqrt{(3\cos\theta-a)^2+(\sqrt{5}\sin\theta)^2}=\sqrt{4(\cos\theta-\frac{3}{4}a)^2+5-\frac{5}{4}a^2}$，若存在以点 P 为圆心的圆 P，使得椭圆 C 与圆 P 有四个不同的公共点，则$|PM|$最小值不能在 $\cos\theta=\pm1$ 时取得，$\therefore -1<\frac{3}{4}a<1$，得$-\frac{4}{3}<a<\frac{4}{3}$.

16. -1 或 $-\frac{1}{8}$【解析】设 $t=x^2-3x$，则 $t\in[-\frac{9}{4},0]$. $f(x)=g(t)=|t-2m|+m$，若 $2m\geqslant0$ 或 $2m\leqslant-\frac{9}{4}$，函数 $g(t)$ 的图象如图 1、图 2 所示，则最大值和最小值之差为 $\frac{9}{4}$，不满足要求. 若 $-\frac{9}{4}<2m<0$，即 $-\frac{9}{8}<m<0$ 时，如图 3 所示，$g(t)_{\max}=\max\{g(-\frac{9}{4}),g(0)\}$，$g(t)_{\min}=g(2m)$，$\therefore g(t)_{\max}-g(t)_{\min}=\max\{g(-\frac{9}{4}),g(0)\}-m=\max\{3m+\frac{9}{4},-m\}-m=\max\{2m+\frac{9}{4},-2m\}$，$\therefore 2m+\frac{9}{4}=2$ 或 $-2m=2$，$\therefore m=-\frac{1}{8}$ 或 $m=-1$.

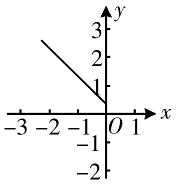


图 1

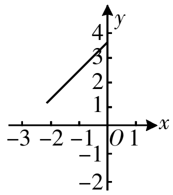


图 2

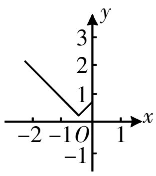
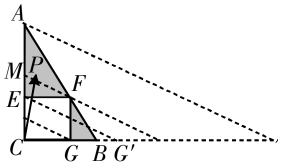


图 3

17. $(\frac{1}{2},3)$【解析】由已知得：$CE=\frac{4}{3}$，$CG=2$，延长 CB 至点 G'，使得 $CG'=2CG$. $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CE}+y(2\overrightarrow{CG})=x\overrightarrow{CE}+y\overrightarrow{CG'}$. 若点 P 在线段 EG' 上运动，则 $x+y=1$. $\therefore$ 如图可知：$\frac{CG}{CG'}<x+y<\frac{CA}{CE}$，$\therefore\frac{1}{2}<x+y<3$.



第 17 题图

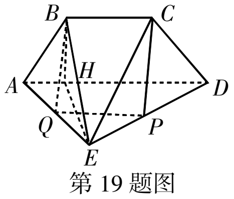
三、解答题

18. (Ⅰ) $f(x+\theta)=\sin(x+\theta+\frac{\pi}{6})$，要使 $f(x+\theta)$ 是奇函数，则当 $x=0$ 时，$\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=0$，$\therefore\theta+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$\therefore\theta=k\pi-\frac{\pi}{6}$，又 $\because\theta\in[0,2\pi]$，$\therefore\theta=\frac{5\pi}{6}$ 或 $\theta=\frac{11\pi}{6}$.

(Ⅱ) $g(x)=f^2(x)=\sin^2(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1-\cos(2x+\frac{\pi}{3})}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{3})$，令 $2k\pi<2x+\frac{\pi}{3}<\pi+2k\pi$，解得 $-\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\pi$，又 $\because x\in[-\frac{\pi}{3},\pi]$，$\therefore g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},\pi]$ 上的单调递增区间是 $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$，$(\frac{5\pi}{6},\pi)$.

19. (Ⅰ)取 AE 中点 Q，连接 QP，QB，$\because$ 易证四边形 $BQPC$ 为平行四边形，$\therefore CP\parallel BQ$，$CP$ 不在面 ABE 内，$CP\parallel$面 ABE.

(Ⅱ)$\because$ 由(Ⅰ)的 $CP\parallel BQ$，则 CP 与平面 AED 所成角即为 BQ 与平面 AED 所成角. 过 B 作 $BH\perp AD$，连接 HE，由于 $CE=\sqrt{10}$，得 $BE=\sqrt{6}$，$BH=\sqrt{3}$，$HE=\sqrt{3}$，$\therefore BH\perp HE$，$\therefore BH\perp$面 AED. $\angle BQH$ 为 BQ 与平面 AED 所成角的大小为 $60°$.



第 19 题图

20. (Ⅰ)当 $n=1$ 时，$3S_1=2a_2$，解得 $a_2=\frac{3}{2}$. $\because 3S_n=(n+1)a_{n+1}$ ①，$\therefore 3S_{n-1}=na_n$ ②. ①−②得：$3a_n=(n+1)a_{n+1}-na_n$，化简得：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+3}{n+1}(n\geqslant2)$. $\therefore a_n=a_2\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_5}{a_4}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{7}{5}\cdots\frac{n+2}{n}=\frac{(n+1)(n+2)}{8}(n\geqslant3)$，当 $n=2$ 时也符合要求，$\therefore a_n=\begin{cases}1,n=1\\ \frac{(n+1)(n+2)}{8},n\geqslant2\end{cases}$.

(Ⅱ) $b_n=\begin{cases}-5,n=1\\ 8(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)},n\geqslant2\end{cases}$，当 $n\geqslant2$ 时，$b_n=8(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}=8(-1)^n(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})$. 当 n 为偶数时，$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=-5+8[(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})-(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})]=-5+8(\frac{1}{3}+\frac{1}{n+2})=-\frac{7}{3}+\frac{8}{n+2}$. 当 n 为奇数时，若 $n=1$，则 $T_1=-5$. 若 $n\geqslant3$，则 $T_n=-5+8[(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})-(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})+\cdots-(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})]=-5+8(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2})=-\frac{7}{3}-\frac{8}{n+2}$. 当 $n=1$ 时也满足. 综上所述，$T_n=-\frac{7}{3}+(-1)^n\frac{8}{n+2}$.

21. (Ⅰ)由已知得：$p=2$，$\therefore$ 抛物线 C：$y^2=4x$.

(Ⅱ)(ⅰ)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=k_1x\\ y^2=4x\end{cases}$，得：$k_1^2x^2-4x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=\frac{4}{k_1^2}$，$\therefore A(\frac{4}{k_1^2},\frac{4}{k_1})$. 同理 $B(\frac{4}{k_2^2},\frac{4}{k_2})$. $k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$，$\therefore$ 直线 AB：$y-\frac{4}{k_1}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(x-\frac{4}{k_1^2})$，化简得：$k_1k_2x-(k_1+k_2)y+4=0$，由于直线 AB 与圆 O 相切，$\therefore$ 点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{(k_1k_2)^2+(k_1+k_2)^2}}=2$，化简得：$(k_1k_2)^2+(k_1+k_2)^2-4=0$，$\therefore (k_1k_2)^2=4-(k_1+k_2)^2\leqslant4$，$\therefore -2\leqslant k_1k_2<0$，$\therefore k_1k_2$ 的最小值为 -2. (ⅱ) $\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=\frac{1+k_1k_2}{\sqrt{(k_1k_2)^2+k_1^2+k_2^2+1}}$ (*)，由(ⅰ)可知 $(k_1k_2)^2+(k_1+k_2)^2-4=0$，$\therefore (k_1k_2)^2+k_1^2+k_2^2=4-2k_1k_2$，$\therefore$(*)式可化为：$\cos\angle AOB=\frac{1+k_1k_2}{\sqrt{5-2k_1k_2}}$，设 $t=\sqrt{5-2k_1k_2}$，则 $t\in(\sqrt{5},3]$. $\cos\angle AOB=$

$\frac{1+k_1k_2}{\sqrt{5-2k_1k_2}}=\frac{\frac{5-t^2}{2}+1}{t}=\frac{7}{2t}-\frac{t}{2}$，在$(\sqrt{5},3]$上单调递减，∴$\cos\angle AOB\in[-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{5}}{5})$. 在$\triangle OMN$中，由余弦定理得：$|MN|=$ $\sqrt{OM^2+ON^2-2OM\cdot ON\cos\angle AOB}=$ $\sqrt{2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cdot\cos\angle AOB}=2\sqrt{2-2\cos\angle AOB}\in$ $(\frac{2\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5},\frac{4\sqrt{6}}{3}]$.

22. (Ⅰ)$f'(x)=\frac{a}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2a+\sqrt{x}}{2x}$. 若$2a\geqslant-\frac{1}{2}$，即$a\geqslant-\frac{1}{4}$时，则$f'(x)\geqslant0$在$(0,+\infty)$上恒成立，$f(x)$的单调递增区间是$(0,+\infty)$. 若$a<-\frac{1}{4}$，令$f'(x)>0$，得$x>4a^2$，$f(x)$的单调递增区间是$(4a^2,+\infty)$.

(Ⅱ)要使$f(x)>mx$，只需$m<\frac{f(x)}{x}$. ∴要满足题意，即求$m<\min\limits_{a\in[-2,\frac{1}{2}]}\{\max\limits_{x\in[\frac{1}{4},2]}\{\frac{f(x)}{x}\}\}$. 设$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则$g(x)=\frac{a\ln x+\sqrt{x}}{x}$，∴$g'(x)=\frac{2a-2a\ln x-\sqrt{x}}{2x^2}$，设$h(x)=2a-2a\ln x-\sqrt{x}$，则$h'(x)=-\frac{4a+\sqrt{x}}{2x}$. (1)若$4a\geqslant-\frac{1}{2}$，即$a\geqslant-\frac{1}{8}$时，则$h'(x)\leqslant0$在$[\frac{1}{4},2]$上恒成立，$h(x)$在$[\frac{1}{4},2]$上单调递减. $h(\frac{1}{4})=2a+4a\ln2-\frac{1}{2}$，$h(2)=2a-2a\ln2-\sqrt{2}<2a-\sqrt{2}<0$. ①当$h(\frac{1}{4})\leqslant0$，即$-\frac{1}{8}\leqslant a\leqslant\frac{1}{4+8\ln2}$时，$g'(x)\leqslant0$在$[\frac{1}{4},2]$上恒成立，$g(x)$在$[\frac{1}{4},2]$上单调递减. ∴$g(x)_{\max}=g(\frac{1}{4})=-8a\ln2+2\geqslant-8\ln2\cdot\frac{1}{4+8\ln2}+2=1+\frac{1}{1+2\ln2}$；②当$h(\frac{1}{4})>0$，即$\frac{1}{4+8\ln2}<a\leqslant\frac{1}{2}$时，由于$h(x)$在$[\frac{1}{4},4]$上单调递减，且$h(\frac{1}{4})>0$，$h(2)<0$，∴存在$x_0\in(\frac{1}{4},2)$，使得$h(x_0)=0$，即$h(x_0)=2a-2a\ln x_0-\sqrt{x_0}=0$，此时$g(x)$在$(\frac{1}{4},x_0)$上单调递增，在$(x_0,2)$上单调递减，∴$g(x)_{\max}=g(x_0)=\frac{a\ln x_0+\sqrt{x_0}}{x_0}$. ∵$h(x_0)=2a-2a\ln x_0-\sqrt{x_0}=0$，∴$2a=\frac{\sqrt{x_0}}{1-\ln x_0}\leqslant1$. ∵$\frac{\sqrt{x}}{1-\ln x}$在$[\frac{1}{4},2]$单调递增且当$x=1$时，$\frac{\sqrt{x}}{1-\ln x}=1$，∴$x_0\leqslant1$. ∴$g(x_0)=$ $\frac{a\ln x_0+\sqrt{x_0}}{x_0}=\frac{\frac{\sqrt{x_0}}{2(1-\ln x_0)}\ln x_0+\sqrt{x_0}}{x_0}=$ $\frac{2\sqrt{x_0}-\sqrt{x_0}\ln x_0}{2x_0(1-\ln x_0)}$. 设$y=\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x}\ln x}{2x(1-\ln x)}$ $(\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant1)$，则$y'=\frac{\sqrt{x}\ln x(3\ln x-5)}{4x^2(1-\ln x)^2}<0$，∴函数$y$在$[\frac{1}{4},1]$上单调递减，∴$g(x_0)=\frac{2\sqrt{x_0}-\sqrt{x_0}\ln x_0}{2x_0(1-\ln x_0)}\geqslant\frac{2\sqrt{1}-\sqrt{1}\ln1}{2\cdot1\cdot(1-\ln1)}=1$，即$g(x)_{\max}\geqslant1$. (2)若$-\sqrt{2}<4a<-\frac{1}{2}$，即$-\frac{\sqrt{2}}{4}<a<-\frac{1}{8}$时，令$h'(x)=-\frac{4a+\sqrt{x}}{2x}=0$，得$x=16a^2$. $h(x)$在$[\frac{1}{4},16a^2]$上单调递增，在$[16a^2,2]$上单调递减，∴$h(x)_{\max}=h(16a^2)=2a-2a\ln(16a^2)x+4a=2a[3-\ln(16a^2)]<2a(3-\ln2)<0$，∴$g'(x)\leqslant0$在$[\frac{1}{4},2]$上恒成立，$g(x)$在$[\frac{1}{4},2]$上单调递减. ∴$g(x)_{\max}=g(\frac{1}{4})=-8a\ln2+2\geqslant-8\ln2\cdot(-\frac{1}{8})+2=2+\ln2$. (3)若$4a\leqslant-\sqrt{2}$，即$-2\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{4}$时，$h'(x)>0$在$[\frac{1}{4},2]$上恒成立，$h(x)$在$[\frac{1}{4},2]$上单调递增. 又$h(2)<0$，∴$g'(x)\leqslant0$在$[\frac{1}{4},2]$上恒成立，$g(x)$在$[\frac{1}{4},2]$上单调递减. ∴$g(x)_{\max}\geqslant g(\frac{1}{4})=-8a\ln2+2\geqslant-8\ln2\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{4})+2=2+2\sqrt{2}\ln2$. 综上所述，$[g(x)_{\max}]_{\min}\geqslant1$，∴$m<1$.

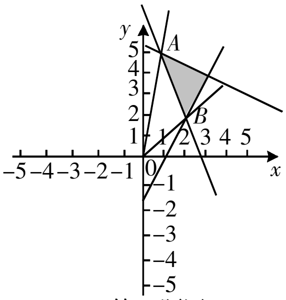
优化卷(二)

一、选择题

1. A【解析】$\complement_UA=\{2,4,6\}$，$\complement_UB=\{1,2,6\}$，∴$(\complement_UA)\cap(\complement_UB)=\{2,6\}$，∴选A.

2. C【解析】∵$z=\frac{m+i}{2-i}=\frac{(m+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2m-1}{5}+\frac{m+2}{5}i$是纯虚数，∴$\begin{cases}2m-1=0\\m+2\neq0\end{cases}$，即$m=\frac{1}{2}$. ∴选C.

3. D【解析】由实数x,y满足约束条件$\begin{cases}2x-y-2\leqslant0\\x+2y-11\leqslant0\\3x+y-8\geqslant0\end{cases}$，作可行域如图，由图可知，当$y=(z-1)x$过$A$时，$z$取得最大值，$A(1,5)$，此时$z$取最大值6，∴选D.



第3题图

4. C【解析】由函数图象过原点可得$f(0)=0$，∴排除B，$f(1)>0$，∴排除A，由函数图象过点$(\pi,0)$可得$f(\pi)=0$，∴排除D，∴选C.

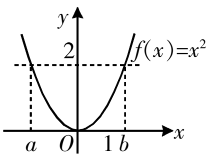
5. A【解析】根据题意，设$g(t)=t+\ln t$，其定义域为$(0,+\infty)$，其导数$g'(t)=1+\frac{1}{t}$，又由$t>0$，则$g'(t)=1+\frac{1}{t}>0$，则函数$g(t)=t+\ln t$在$(0,+\infty)$上为增函数，若$x-y>0$，即$x>y$，函数$g(t)=t+\ln t$在$(0,+\infty)$上为增函数，则有$\ln x+x>\ln y+y$，变形可得$x-y>\ln y-\ln x$，则“$x-y>0$”

是“$x-y>\ln y-\ln x$”的充分条件；反之：若 $x-y>\ln y-\ln x$，即 $\ln x+x>\ln y+y$，又由函数 $g(t)=t+\ln t$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，则有 $x>y$，即 $x-y>0$，则“$x-y>0$”是“$x-y>\ln y-\ln x$”的必要条件；综合可得：“$x-y>0$”是“$x-y>\ln y-\ln x$”的充分必要条件；∴ 选 A.

6. C【解析】设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，线段 MN 中点 $P(x_0,y_0)$. 由 $\begin{cases}mx_1^2+ny_1^2=1\\mx_2^2+ny_2^2=1\end{cases}$，两式相减得 $m(x_1^2-x_2^2)+n(y_1^2-y_2^2)=0$. 又 $x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，∵ 直线 $y=1-4x$，∴$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-4$，∴$mx_0-4ny_0=0$，∵$k_{OP}=\frac{y_0}{x_0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ∴$\frac{m}{n}=\frac{4y_0}{x_0}=2\sqrt{2}$. ∴ 选 C.

7. A【解析】∵ 非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 夹角为 θ，若 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=2|\boldsymbol{b}|^2\cos\theta$，不等式 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|$ 对任意 θ 恒成立，∴$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2\geqslant|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|^2$，∴$4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2\geqslant\boldsymbol{a}^2+2\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda^2\boldsymbol{b}^2$，整理可得 $(13-\lambda^2)+(8-4\lambda)\cos\theta\geqslant0$ 恒成立，∵$\cos\theta\in[-1,1]$，∴$\begin{cases}13-\lambda^2+8-4\lambda\geqslant0\\13-\lambda^2-8+4\lambda\geqslant0\end{cases}$，∴$\begin{cases}-7\leqslant\lambda\leqslant3\\-1\leqslant\lambda\leqslant5\end{cases}$，∴$-1\leqslant\lambda\leqslant3$，∴ 选 A.

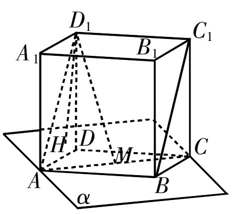
8. D【解析】∵$f(x)=\sin(x-3)+x-1$，∴$f(x)-2=\sin(x-3)+x-3$，令 $g(x)=f(x)-2$，则 $g(x)$ 关于 $(3,0)$ 对称，∵$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_7)=14$，∴$f(a_1)-2+f(a_2)-2+f(a_3)-2+\cdots+f(a_7)-2=0$，即 $g(a_1)+g(a_2)+g(a_3)+\cdots+g(a_7)=0$，∴$g(a_4)$ 为 $g(x)$ 与 x 轴的交点，由 $g(x)$ 关于 $(3,0)$ 对称，可得 $a_4=3$，∴$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=7a_4=21$. ∴ 选 D.



第 9 题图

9. B【解析】由 $f(x)=x^2$ 的图象，显然可得 B.

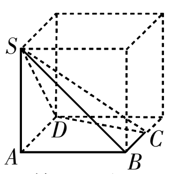
10. A【解析】设 D_1 在平面 α 上的射影为 H，D_1 在平面 AC 上的射影为 M，显然 $\angle D_1AM=60°$，$0\leqslant D_1H\leqslant D_1M$，直线 BC_1 与平面 α 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{D_1H}{D_1A}\in[0,\frac{D_1M}{D_1A}]$，$\sin\theta\in[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$，$\theta\in[0,\frac{\pi}{3}]$，选 A.



第 10 题图

二、填空题

11. 3　2【解析】四棱锥的直观图如图所示，$S-ABCD$ 是正方体的一部分，其中△SAB，△SAD，△SBC 是直角三角形；共有 3 个. 体积为 $\frac{1}{3}\times2\times\frac{1}{2}\times3\times2=2$.



第 11 题图

12. -3　$\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$【解析】∵α 为第二象限角，且 $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{4}{3}$，∴$\tan\alpha=-\frac{1}{7}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，∴$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\cos\alpha=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{5}$. $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{4}{5}$. ∴$\tan(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{8})=\frac{1-\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}=\frac{1+\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-3$，∵$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin(\alpha+\frac{\pi}{12})=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

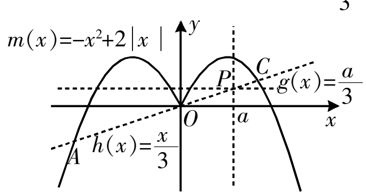
13. $m>0$　$y=\pm\sqrt{2}x$【解析】方程 $\frac{x^2}{m^2+4}-\frac{y^2}{2m}=1$ 表示双曲线，∴$m>0$，∵$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{3}$，∴$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$，∴$y=\pm\sqrt{2}x$.

14. $\frac{3}{2}$　$\frac{3}{8}$【解析】设“试验成功”为事件 A，则 $P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. 由题意可得：$X:B(2,\frac{3}{4})$. ∴$E(X)=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$，$D(X)=2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$.

15. $-\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant\frac{7}{2}$【解析】$(|x-a|+|2x-1|)_{\min}=\left|\frac{1}{2}-a\right|$，由已知 $\left|\frac{1}{2}-a\right|\leqslant3$，得 $-\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant\frac{7}{2}$.

16. 24【解析】如果取出的数字是 $aabb$，第一步，取数字，有 C_3^2 种取法，第二步，组成四位数，有 2 种排法，共有 $C_3^2\times2=6$ 种；如果取出的数字是 $aabc$，第一步，取数字，有 C_3^1 种取法，第二步，组成四位数，先排 bc 有 2 种排法，再将二个 a 插入到由 bc 隔开的三个位置，有 C_3^2 种排法，共有 $C_3^1\times2\times C_3^2=18$ 种，∴ 总共有 24 种满足条件的四位数.

17. $[-\frac{7}{3},3]$【解析】考虑函数 $m(x)=-x^2+2|x|$，$g(x)=\frac{a}{3}$，$x\in(-\infty,a]$，点 $P(a,\frac{a}{3})$ 在 $h(x)=\frac{x}{3}$ 上运动，即 $m(x)$ 上存在一点 $Q(x_Q=b\leqslant a)$，使得 $y_Q\leqslant\frac{a}{3}$，注意到 $m(x)\leqslant1$，又 $m(x)$ 与 $h(x)$ 图象交于 $x_A=-\frac{7}{3}$，$x_O=0$，$x_C=\frac{5}{3}$，综合考虑点 P 位置和交点 ⇒ $a\in[-\frac{7}{3},3]$.



三、解答题

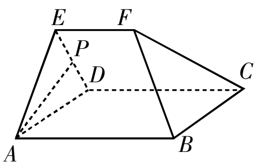
18. (Ⅰ)∵$C=\pi-(A+B)$,∴$\tan C=-\tan(A+B)=-\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}}=-1$,又∵$0<C<\pi$,∴$C=\dfrac{3}{4}\pi$.

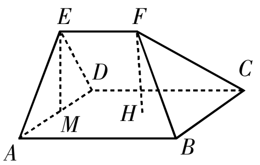
(Ⅱ)∵$C=\dfrac{3}{4}\pi$,∴AB 边最大,即 $AB=\sqrt{17}$. 又 $\tan A<\tan B$,$A,B\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,∴角 A 最小,BC 边为最小边.

由 $\begin{cases}\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{1}{4}\\ \sin^2A+\cos^2A=1\end{cases}$,且 $A\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

由 $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$,得:$BC=AB\dfrac{\sin A}{\sin C}=\sqrt{2}$. ∴最小边 $BC=\sqrt{2}$.

19. (Ⅰ)过点 A 在平面 ADE 中作 DE 的垂线,垂足为 P,∵平面 $ADE\perp$ 平面 $CDEF$,∴$AP\perp$ 平面 $CDEF$,∴$AP\perp CD$,又∵四边形 $ABCD$ 是正方形,∴$AD\perp CD$,∴$CD\perp$ 平面 ADE,且 $CD\subset$ 面 $ABCD$,∴平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$.





(Ⅱ)过点 E 在平面 ADE 中作 AD 的垂线,垂足为 M,由(Ⅰ)知 $EM\perp$ 平面 $ABCD$,$\angle EDC=90°$,$AB=2$,$ED=2$,$EF=1$,得:$CF=\sqrt{5}$,设 F 到平面 $ABCD$ 的距离为 FH,由 CF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$,得 $FH=\sqrt{3}$,∵$EF\parallel CD$,∴$EM=\sqrt{3}$,∴$\angle EDA=60°$,$\triangle ADE$ 是正三角形,$V=V_{四棱锥F\text{-}ABCD}+V_{三棱锥F\text{-}ADE}=\dfrac{1}{3}\times4\times\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}\times1=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

20. (Ⅰ)由已知得 $4S_n=(a_n+1)^2$,$n\geqslant2$ 时,$4S_{n-1}=(a_{n-1}+1)^2$,作差得:$4a_n=a_n^2+2a_n-a_{n-1}^2-2a_{n-1}$,∴$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$,又∵$\{a_n\}$为正数数列,∴$a_n-a_{n-1}=2$,即$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列,由 $2\sqrt{S_1}=a_1+1$,得 $a_1=1$,∴$a_n=2n-1$.

(Ⅱ)$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$,

∴$B_n=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(2n+1)}$.

21. (Ⅰ)由已知 $F(\dfrac{1}{4},0)$,∴直线 l 的方程为 $y=-x+\dfrac{1}{4}$,设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y=-x+\dfrac{1}{4}\\ y^2=x\end{cases}$,得:$y^2+y-\dfrac{1}{4}=0$,∴$\begin{cases}y_1+y_2=-1\\ y_1y_2=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$,$|AB|=\sqrt{2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{2}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2$.

(Ⅱ)直线 l 的方程为 $y=-x+t$,设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y=-x+t\\ y^2=x\end{cases}$ 得 $y^2+y-t=0$,解得 $y_A=\dfrac{-1+\sqrt{1+4t}}{2}$,$y_B=\dfrac{-1-\sqrt{1+4t}}{2}$,由 $\begin{cases}y=-x+t\\ y=x+3\end{cases}$ 得 $y_P=\dfrac{t+3}{2}$,$\left|\dfrac{PA}{PB}\right|=\dfrac{y_A-y_P}{y_B-y_P}=\dfrac{t+4-\sqrt{1+4t}}{t+4+\sqrt{1+4t}}=1-\dfrac{2\sqrt{1+4t}}{t+4+\sqrt{1+4t}}$,令 $\sqrt{1+4t}=u$,则 $\left|\dfrac{PA}{PB}\right|=1-\dfrac{8u}{u^2+15+4u}=1-\dfrac{8}{u+\dfrac{15}{u}+4}\geqslant1-\dfrac{4}{\sqrt{15}+2}=\dfrac{19-4\sqrt{15}}{11}$,取等号时 $u=\sqrt{15}$,$t=\dfrac{7}{2}$,

即 $\left|\dfrac{PA}{PB}\right|$ 的最小值为 $\dfrac{19-4\sqrt{15}}{11}$.

22. (Ⅰ)$f'(x)=\dfrac{(x-2)(x-e^x)}{(x-1)^2}$,∵$x-e^x<x-x-1=-1<0$,∴$x<2$ 且 $x\neq1$ 时 $f'(x)>0$,$x>2$ 时 $f'(x)<0$,∴$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$,$(1,2)$ 时单调递增,$f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 时单调递减.

(Ⅱ)先证:$x\in(0,1)$ 时 $f(2-x)<f(2+x)$,即证 $\dfrac{(2-x)^2-e^{2-x}}{1-x}<\dfrac{(2+x)^2-e^{2+x}}{1+x}$,∵$1-x>0$,$1+x>0$,只要证:$[(2-x)^2-e^{2-x}](1+x)<[(2+x)^2-e^{2+x}](1-x)$,即证:$2x^3-(x+1)e^{2-x}-(x-1)e^{2+x}<0$(*),考虑 $g(x)=2x^3-(x+1)e^{2-x}-(x-1)e^{2+x}$,$g(0)=0$,$g'(x)=x(6x+e^{2-x}-e^{2+x})$,考虑 $t(x)=6x+e^{2-x}-e^{2+x}$,$t(0)=0$,$t'(x)=6-e^{2-x}-e^{2+x}=6-e^2(\dfrac{1}{e^x}+e^x)\leqslant6-2e^2<0$,∴$t(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减,$t(x)<t(0)=0$,即在区间 $(0,1)$ 上 $g'(x)<0$,∴$g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减,$g(x)<g(0)=0$,(*)式得证,∴$x\in(0,1)$ 时,$f(2-x)<f(2+x)$,令 $2-x=x_2$,则 $x_2\in(1,2)$,有 $f(x_2)<f(4-x_2)$,其中 $4-x_2>2$,若函数 $y=f(x)-a$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3,$x_1<x_2<x_3$,由(Ⅰ)知,$x_2\in(1,2)$,$x_3\in(2,+\infty)$,且 $f(x_2)=f(x_3)$,∴$f(x_3)<f(4-x_2)$,由(Ⅰ)知,$f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减,∴$x_3>4-x_2$,即有 $x_2+x_3>4$.

优化卷(三)

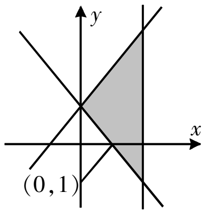
一、选择题

1. D【解析】本题考查集合的运算. ∵$\complement_UA=\{x|x\leqslant4\}$,$B=\{x|x\geqslant1\}$,∴$(\complement_UA)\cap B=\{x|1\leqslant x\leqslant4\}$. ∴选 D.

2. A【解析】本题考查双曲线的渐近线方程. 令 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{6}=0\Rightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$. ∴选 A.

3. D【解析】本题考查三角函数的性质、充要条件. 取 $\theta=-\frac{3\pi}{2}<\frac{\pi}{6}$ 时, $\sin\theta=1$, ∴充分性不成立;取 $\theta=\pi$, $\sin\theta=0<\frac{1}{2}$, 但 $\theta>\frac{\pi}{6}$, ∴必要性不成立. 综上所述, $\theta<\frac{\pi}{6}$ 是 $\sin\theta<\frac{1}{2}$ 的既不充分也不必要条件, ∴选D.

4. B【解析】本题考查线性规划. 如图在平面直角坐标内画出不等式表示的可行域即阴影部分,目标函数表示的几何意义即 $(0,-1)$ 到可行域内的点的距离的平方的最小值,由图象可知 $d=\frac{|0-1-1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$, ∴最小值为2. ∴选B.



第4题图

5. B【解析】本题考查函数图象与性质、导数运算与单调性. $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{e^{|-x|}}=\frac{x^2-1}{e^{|x|}}=f(x)$, ∴ $f(x)$ 为偶函数,函数图象关于 y 轴对称,排除A. 当 $x>0$ 时, $f'(x)=\frac{2xe^x-(x^2-1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{e^x}$, 令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1+\sqrt{2}$, ∴ $f(x)$ 在 $(0,1+\sqrt{2})$ 上递增,在 $(1+\sqrt{2},+\infty)$ 上递减. ∴选B.

6. B【解析】本题考查几何体的三视图和体积的计算. 由三视图得该几何体为底面边长为2,高为1的正三棱柱,截去一个底面是边长为1的正三角形,高为2的三棱锥. 则其体积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times4\times2-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1\times2=\frac{11}{6}\sqrt{3}$. ∴选B.

7. C【解析】本题考查离散型随机变量的期望和方差. 由题意得 $E(X)=1\times P(X=1)+3\times P(X=3)=1\times\frac{2}{5}+3\times\frac{3}{5}=\frac{11}{5}$; $D(X)=(\frac{11}{5}-1)^2\times\frac{2}{5}+(\frac{11}{5}-3)^2\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$. $E(Y)=0\times P(Y=0)+2\times P(Y=2)+4\times P(Y=4)=0\times\frac{1}{10}+2\times\frac{6}{10}+4\times\frac{3}{10}=\frac{12}{5}$; $D(Y)=(\frac{12}{5}-0)^2\times\frac{1}{10}+(\frac{12}{5}-2)^2\times\frac{6}{10}+(\frac{12}{5}-4)^2\times\frac{1}{10}=\frac{36}{25}$. 得 $E(X)<E(Y)$, $D(X)<D(Y)$, ∴选C.

8. A【解析】本题考查空间角大小的比较. 由题意可知 $\angle PBA$ 为直线 PB 与 DE 所成角 θ_1, $\angle PDA$ 为直线 PD 与面 ABC 所成角 θ_2, 过 A 作 $AH\perp BC$, 则 $\angle PHA$ 为二面角 $P-BC-A$ 的平面角 θ_3. ∵ $\tan\theta_1=\frac{PA}{AB}$, $\tan\theta_2=\frac{PA}{AD}$, $\tan\theta_3=\frac{PA}{AH}$, $AB=AD>AH$, ∴ $\theta_1=\theta_2<\theta_3$. ∴选A.

9. B【解析】本题考查基本不等式,多元函数求最值. 将 $\overrightarrow{OD}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}+z\cdot\overrightarrow{OC}$ 两边平方, 可得 $x^2+y^2+z^2+xy=1$, 即 $(x+y)^2-xy+z^2=1$, 由基本不等式可知, $xy=(x+y)^2+z^2-1\leqslant(\frac{x+y}{2})^2$; 设 $2x+2y+z=t$, 则 $x+y=\frac{t-z}{2}$, 带入上式得 $(\frac{t-z}{2})^2+z^2-1\leqslant(\frac{t-z}{4})^2$, 即 $19z^2-6tz+3t^2-16\leqslant0$ 有解, 则 $\Delta=64(19-3t^2)\geqslant0$, ∴ $t=2x+2y+z\leqslant\frac{\sqrt{57}}{3}$. ∴选B.

10. B【解析】本题考查数列不等式的放缩和裂项相消. 对 $a_{n+1}=(1+\frac{1}{2\sqrt{n+1}})a_n$, 两边取对数, 可得 $\ln a_{n+1}=\ln(1+\frac{1}{2\sqrt{n+1}})+\ln a_n$, $\ln a_{n+1}-\ln a_n=\ln(1+\frac{1}{2\sqrt{n+1}})<\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;
∴ $(\ln a_2-\ln a_1)+(\ln a_3-\ln a_2)+\cdots+(\ln a_n-\ln a_{n-1})<\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$, 可得 $\ln a_n-\ln a_1<\sqrt{n}-1$, 当 $a_1=1$ 时, $a_n<e^{\sqrt{n}-1}$, ∴ $a_9<e^2$, $a_{16}<e^3$; 当 $a_1=e$ 时, $a_n<e^{\sqrt{n}}$, ∴ $a_9<e^3$, $a_{16}<e^4$. ∴选B.

二、填空题

11. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　1【解析】本题考查复数计算. 由题意 $z=\cos\frac{2020\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2020\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, ∴虚部为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|z|=1$.

12. $(2,0)$　1或 $\frac{1}{7}$【解析】本题考查直线过定点问题以及直线和圆相交时,圆心到直线的距离、半径、半弦长之间的勾股关系. 由题知 $\lambda(x-2)+y=0$, ∴直线过定点 $(2,0)$; 由 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,且圆的半径为1,知圆心 $(0,1)$ 到直线的距离 $d=\frac{|1-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=\frac{1}{7}$.

13. $\sqrt{21}$　$\frac{5}{14}\sqrt{7}$【解析】本题考查解三角形中的正、余弦定理. 由余弦定理 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\angle ABC$ 及 $AB=5$, $BD=1$, $\angle ABC=50°$, 解得 $AD=\sqrt{21}$; 由正弦定理 $\frac{AD}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$ 知 $\sin\angle ADB=\frac{5}{14}\sqrt{7}$, ∴ $\sin\angle ADC=\frac{5}{14}\sqrt{7}$.

14. 1　1024【解析】本题考查二项式定理. 用赋值法令 $x=0$ 解得 $a_0=1$; 对二项式定理求导可得 $8(1+x)^7=a_1+2a_2x+\cdots+8a_8x^7$, 再令 $x=0$ 解得 $a_1+2a_2+\cdots+8a_8=1024$.

15. 100【解析】本题考查计数原理及排列组合问题. 由题知不推荐甲到学校 A, 则从余下的两所学校 B、C 中选一所推荐, ①若其余4名同学均不推荐到甲

所推荐的学校，则有$C_2^1\cdot(C_4^2+C_4^3)\cdot A_2^2=40$种不同的推荐方法；②若其余4个同学中有1人或2人推荐到甲所推荐的学校，则有$C_2^1\cdot(C_4^1\cdot C_3^2\cdot A_2^2+C_4^2)=60$种不同的推荐方法；$\therefore$总的推荐方法总数为$40+60=100$.

16. $[3,5]$【解析】本题考查向量模长的范围问题. 设$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(3,0)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3\cos\theta,3\sin\theta)$，则$\boldsymbol{a}=(1+2\cos\theta,2\sin\theta)$，$\boldsymbol{b}=(1-\cos\theta,-\sin\theta)$，$|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=\sqrt{(4-\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}=\sqrt{17-8\cos\theta}\in[3,5]$.

17. $(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$【解析】本题考查椭圆离心率的范围问题. 设过焦点F_1的直线为$x+c=ny$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立直线与椭圆方程得$(b^2n^2+a^2)y^2-2ncb^2y-b^4=0$，$\therefore y_1+y_2=\frac{2ncb^2}{b^2n^2+a^2}$，$y_1y_2=\frac{-b^4}{b^2n^2+a^2}$，$S=\frac{1}{2}\times 2c\times|y_1-y_2|=\frac{2acb^2\sqrt{n^2+1}}{b^2n^2+a^2}=\frac{2acb^2}{b^2\sqrt{n^2+1}+\frac{c^2}{\sqrt{n^2+1}}}$，$\because n=0$时取到最大值，$\therefore\frac{c^2}{b^2}\leqslant 1\Rightarrow\frac{c^2}{a^2}\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow e=(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

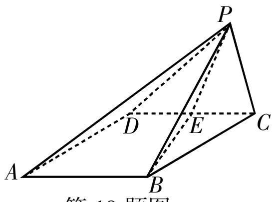
三、解答题

18. （Ⅰ）$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$的图象向右平移$\frac{2\pi}{3}$个单位后得到函数$g(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\pi\omega)=\sin\omega x$，$\therefore\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\pi\omega=2k\pi$，$\therefore\omega=\frac{1}{2}-3k$，$\because 0<\omega<1$，$\therefore\omega=\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）$f(4x)+g(4x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\sin 2x=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\pi]$，$f(4x)+g(4x)=\sqrt{3}$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上有唯一的最大值$\sqrt{3}$，$\therefore$该方程解的个数为1个.

19. （Ⅰ）取CD的中点为E，由$PE\perp CD$，$BE\perp CD$证得$PB\perp CD$，$\therefore AB\perp PB$.

（Ⅱ）设$AB=2$，$PB=3$，则$PE=BE=\sqrt{3}$，$\angle PEB=120°$，由等积法$V_{B-PAD}=V_{P-ABD}$，可得点B到面PAD的距离$h=\frac{6\sqrt{13}}{13}$，则直线PB与平面PAD所成角的正弦值$\sin\theta=\frac{h}{PB}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$（本题也可用坐标法求解）.



第19题图

20. （Ⅰ）$a_nb_n=(2n-1)3^{n-1}(n\geqslant 2)$，$a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$.

（Ⅱ）$c_n=\frac{a_{n+1}+1}{a_na_{n+1}b_{n+1}}=\frac{2n+2}{(2n-1)(2n+1)3^n}=\frac{2(n+1)3^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}(2n+1)3^n}=\frac{1}{2}[\frac{1}{(2n-1)3^{n-1}}-\frac{1}{(2n+1)3^n}]$，

$S_n=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1\times 1}-\frac{1}{3\times 3^1})+(\frac{1}{3\times 3^1}-\frac{1}{5\times 3^2})+\cdots+(\frac{1}{(2n-1)3^{n-1}}-\frac{1}{(2n+1)3^n})]=\frac{1}{2}[1-\frac{1}{(2n+1)3^n}]<\frac{1}{2}$，$c_n>0$，$\therefore S_n\geqslant S_1=\frac{4}{9}$，$\therefore\frac{4}{9}\leqslant S_n<\frac{1}{2}$.

21. （Ⅰ）$p=\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）设$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，设CD直线方程为$y=kx+t$. CD与圆相切于劣弧AB，$\therefore -1\leqslant k\leqslant 1$. 由$CD$与圆$x^2+y^2=2$相切得$\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$，得$k^2=\frac{t^2}{2}-1$.

$\therefore 2\leqslant t^2\leqslant 4$，$\sqrt{2}\leqslant t\leqslant 2$ ①，联立方程组$\begin{cases}y=kx+t\\x^2=y\end{cases}$，得$x^2-kx-t=0$，$\therefore x_1+x_2=k$，$x_1\cdot x_2=-t$. $\therefore|CD|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+4t}$. 过点$C$的抛物线切线方程为$y=2x_1x-x_1^2$，过点$D$的抛物线切线方程为$y=2x_2x-x_2^2$，解得$x_M=\frac{k}{2}$，$y_M=-t$，$\therefore$点$M$到直线$CD$的距离$d=\frac{\left|\frac{k^2}{2}+2t\right|}{\sqrt{1+k^2}}$.

$\therefore S_{\triangle MCD}=\frac{1}{2}|CD|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4t}\left|\frac{k^2}{2}+2t\right|=\frac{1}{4}\sqrt{k^2+4t}\,|k^2+4t|$ ②. 令$\sqrt{k^2+4t}=u$，将①代入可得$u=\sqrt{\frac{t^2}{2}+4t-1}\in[2^{\frac{5}{4}},3]$，$\therefore S_{\triangle MCD}=\frac{1}{4}u^3\in[2^{\frac{7}{4}},\frac{27}{4}]$.

22. （Ⅰ）$f'(x)=e^{x-1}+2x+1$在$[-1,0]$上递增，$f'(-1)=e^{-2}-1<0$，$f'(0)=e^{-1}+1>0$，$\therefore$存在$x_0\in[-1,0]$，使得$f'(x_0)=0$，$\therefore f(x)$在$[-1,x_0]$上单调递减，$[x_0,0]$上单调递增，$\therefore f(x)_{\max}=f(0)=e^{-1}$.

（Ⅱ）$\because\frac{a}{x}f(x)\geqslant g(x)$对任意$x\in(0,+\infty)$恒成立，即$\frac{a}{x}(e^{x-1}+x^2+\frac{x}{a^2})\geqslant\frac{a(\ln x+2)}{x}+2\sqrt{x}$，即$\frac{1}{a^2}-\frac{2\sqrt{x}}{a}+x\geqslant\frac{1}{x}(\ln x-e^{x-1}+2)$恒成立. 当$x=1$时，可得$0<a\leqslant\frac{1}{2}$，设$\frac{1}{a}=m$，则$m\geqslant 2$. 可得$(\sqrt{x}-m)^2\geqslant\frac{1}{x}(\ln x-e^{x-1}+2)$. 设$h(x)=\ln x-e^{x-1}+2$，$h'(x)=\frac{1}{x}-e^{x-1}$，$h'(1)=0$，$\therefore h(x)$在$(0,1)$上递增，$(1,+\infty)$上递减. ①当$x\geqslant 2$时，$h(x)$递减，$h(x)\leqslant h(2)=2+\ln 2-e<0$，$\therefore(\sqrt{x}-m)^2\geqslant\frac{1}{x}(\ln x-e^{x-1}+2)$恒成立；②当$0<x<2$时，$p(m)=(m-\sqrt{x})^2$递增，$p(m)\geqslant(2-\sqrt{x})^2$，只需证明$(2-\sqrt{x})^2\geqslant\frac{1}{x}(\ln x-e^{x-1}+2)$，即证$x^2-4x\cdot\sqrt{x}+4x\geqslant\ln x-e^{x-1}+2$，设$F(x)=x^2-4x\cdot\sqrt{x}+4x-\ln x+e^{x-1}-2$，$0<x<2$，$F'(x)=2x-6\sqrt{x}+4-\frac{1}{x}+e^{x-1}$，

$F'(1)=0$，当 $0<x<1$ 时，$e^{x-1}<1$，则 $F'(x)=2x-6\sqrt{x}+4-\frac{1}{x}+e^{x-1}<2x-6\sqrt{x}+4+\frac{x-1}{x}=2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)+\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{x}=$

$(\sqrt{x}-1)\frac{2x\sqrt{x}+\sqrt{x}-4x+1}{x}$，此时发现 $2x\sqrt{x}+\sqrt{x}-4x+1=0$ 的一个根为 $x=1$，那么继续分解$=(\sqrt{x}-1)\frac{2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-4x+1-\sqrt{x}}{x}=$

$(\sqrt{x}-1)^2\frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-1}{x}<0$，∴$F(x)$在$(0,1)$单调递减，$F(x)\geqslant F(1)=0$ 恒成立. 当 $1<x<2$ 时，$F'(x)=2x-6\sqrt{x}+4-\frac{1}{x}+e^{x-1}>2x-6\sqrt{x}+4-\frac{1}{x}+x=3x-6\sqrt{x}+3+1-\frac{1}{x}=3(\sqrt{x}-1)^2+1-\frac{1}{x}>0$，∴$F(x)$在$(1,2)$单调递增，$F(x)\geqslant F(1)=0$ 恒成立. 综上所述：$0<a\leqslant\frac{1}{2}$.

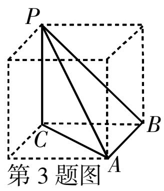
优化卷(四)

一、选择题

1. C【解析】$A=\{x|x>4$ 或 $x<-1\}$，$\complement_U A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$，得$(\complement_U A)\cap B=(0,4]$.

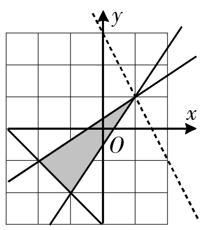
2. A【解析】∵$b^2=1$，∴$c^2=a^2+1$，又 $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$，解得 $a^2=4$，$c^2=5$，由题意焦点在 x 轴上，∴该双曲线的焦点为$(-\sqrt{5},0)$，$(\sqrt{5},0)$.

3. A【解析】观察该几何体的三视图，发现这是一个三棱锥，如图所示，则 $V=\frac{1}{3}S\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{6}$.



第 3 题图

4. B【解析】由题意，作出约束条件所表示的平面区域如图中阴影部分所示，由 $z=2x+y$ 可得 $y=-2x+z$，平移直线 $y=-2x$，由图象可知当直线过 $P(1,1)$点时，直线 $y=-2x+z$ 的纵截距最大，此时 z 最大，$z_{\max}=3$.



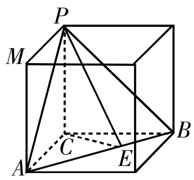
第 4 题图

5. B【解析】由于函数 $f(x)=\frac{\ln|x|}{\cos2x}$ 的定义域关于原点对称，且 $f(-x)=f(x)$，∴$f(x)$是偶函数，排除 D，又 $f(x)$ 在 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$时小于 0，$x\in(\frac{\pi}{4},1)$时大于 0，且当 $x=\frac{\pi}{4}$时，函数无意义，排除 A，C，∴ 选 B.

6. B【解析】由 $4x+y-4a^2+12a<0$ 参数分离可得 $4x+y<4a^2-12a$，不等式有解问题可转化为 $4a^2-12a>(4x+y)_{\min}$，又可以利用 $4x+y=(4x+y)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})=4+\frac{16x}{y}+\frac{y}{x}+4\geqslant8+2\sqrt{\frac{16x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=16$，得出$(4x+y)_{\min}=16$，∴$4a^2-12a>16$，∴$a>4$ 或 $a<-1$. ∴“$a>4$ 或 $a<-1$”是“$a>4$”的必要不充分条件.

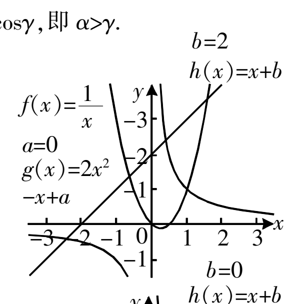
7. D【解析】本题可采用边化角或角化边来解决. 角化边解题过程如下：由 $\tan A=\sin B$ 切化弦可得 $\frac{\sin A}{\cos A}=\sin B$，结合正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $\frac{a}{b}=\cos A$，由余弦定理可知 $\frac{a}{b}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，则 $2ac=b^2+c^2-a^2$，由题 $b^2=ac$，∴$c^2-a^2=ac=b^2$，两边同除以 a^2，整理可得$(\frac{c}{a})^2-\frac{c}{a}-1=0$，∵$a>0$，$c>0$，∴$\frac{c}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，∴$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-(c^2-a^2)}{2ac}=\frac{2a^2}{2ac}=\frac{a}{c}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

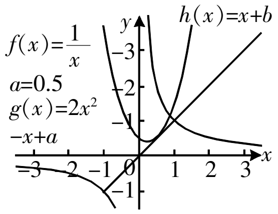
8. C【解析】方法 1：排除法，如图，将该正三棱锥置于正方体中，让点 E 动起来，当点 E 从 A 运动到 B 时，β 从 45°增大到 $\arctan\sqrt{2}$ 再减少到 45°，而 γ 从 0°增加到 90°，β 与 γ 之间的大小无法确定(也可考虑特殊位置 A 与 B 的极限状态). 方法 2：如图，将该正三棱锥置于正方体中，设其棱长为 1，则 $\alpha=\angle EPM$，$\beta=\angle PEC$，$\gamma=\angle ACE$，运用线线角的最小角为线面角原理，可得$\beta<\alpha$，以 C 为坐标原点，CA 为 x 轴，CB 为 y 轴，CP 为 z 轴建立空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$P(0,0,1)$，设 $E(x,1-x,0)$，其中 $0<x<1$，则$\overrightarrow{CA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{CE}=(x,1-x,0)$，$\overrightarrow{PE}=(x,1-x,-1)$，计算可得 $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{2x^2-2x+2}}$，$\cos\gamma=\frac{x}{\sqrt{2x^2-2x+1}}$，∴$\cos\alpha<\cos\gamma$，即 $\alpha>\gamma$.



第 8 题图

9. B【解析】当 $b>0$ 时，直线 $y=x+b$ 与 $y=\frac{1}{x}(x=1)$无交点，与 $y=2x^2-x+a(0\leqslant x\leqslant1)$最多两个交点，∴$b$ 不可能大于 0. 当 $b=0$ 时，a 的大小影响 $y=2x^2-x+a$ $(0\leqslant x\leqslant1)$的上下位置，当 $a>\frac{1}{2}$时，直线与其无公共点，当 $a=$





$\frac{1}{2}$时正好相切,$\therefore a$不可能大于等于$\frac{1}{2}$.

10. C【解析】对于选项 A,可以列举其前五项,分别为$a_1=\frac{3}{5}$,$a_2=\frac{1}{3}$,$a_3=-1$,$a_4=3$,$a_5=\frac{5}{3}$,观察递推关系式$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}$发现,当$a_{n-1}>1$时,$a_n\in(1,2)$,不难发现$a_4=3>1$,$\therefore$ 当$n\geqslant5$时,$a_n\in(1,2)$,结合前五项可知$-1\leqslant a_n\leqslant3$. 对于选项 B,运用作差比较法,$a_{n+1}-a_n=2-(a_n+\frac{1}{a_n})$,由于当$n\geqslant5$时,$a_n\in(1,2)$,$\therefore$ 必有$a_n+\frac{1}{a_n}>2$,则$a_{n+1}-a_n<0$,又$a_5<a_4$,$\therefore$ 当$n\geqslant4$时,$a_{n+1}\leqslant a_n$. 对于选项 C,由$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}$可知$a_n-1=1-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}}$,两边取倒数,$\frac{1}{a_n-1}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}-1}=1+\frac{1}{a_{n-1}-1}$,即$\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n-1}-1}=1$,数列$\{\frac{1}{a_n-1}\}$是首项为$-\frac{5}{2}$,公差为 1 的等差数列,$\therefore a_n=\frac{2n-5}{2n-7}$,当$n\geqslant2023$时,$a_n<\frac{2020}{2019}$(此法可用于证明 A,B 两项). 对于选项 D,由$a_n=\frac{2n-5}{2n-7}$可知$a_n-1=\frac{2}{2n-7}$,当$n_0>\frac{1}{\varepsilon}+\frac{7}{2}$,时$|a_n-1|<\varepsilon$恒成立,即对于任意的$\varepsilon>0$,都存在$n_0\in\mathbf{N}^*$,满足$n_0\geqslant[\frac{1}{\varepsilon}+\frac{7}{2}]+1$时,有$|a_n-1|<\varepsilon$恒成立.

二、填空题

11. -3 $\quad\sqrt{5}$【解析】$z=\frac{(a+\mathrm{i})\cdot(-1-\mathrm{i})}{2}=\frac{-a+1-(1+a)\mathrm{i}}{2}$,由题意得,$a=-3$,$|z|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

12. $x-\sqrt{3}y+2=0$ $\quad 4$【解析】已知直线l恒过$(-3,\sqrt{3})$且在圆上,根据题意,圆心到直线的距离为 3,由点到直线的距离公式解得$m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;根据直线的斜率可得$|CD|=4$.

13. 3 $\quad$ 30【解析】令$x=1$,得$m=3$. 常数项由$\frac{m}{x}$项与$(2x-1)^5$展开式中x项相乘而得,解得常数项为 30.

14. 3 $\quad\frac{9}{8}$【解析】设黑球个数x个,则$\frac{\mathrm{C}_x^2\cdot\mathrm{C}_{8-x}^1}{\mathrm{C}_8^3}=\frac{15}{65}$,解得$x=3$,$\therefore$ 黑球有 3 个.

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

$E(\xi)=0\cdot\frac{5}{28}+1\cdot\frac{15}{28}+2\cdot\frac{15}{56}+3\cdot\frac{1}{56}=\frac{63}{56}=\frac{9}{8}$.

15. $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$【解析】由题意得,$\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}=\frac{2}{p}=8$,$d+2|BF|=|AF|+2|BF|-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}\cdot(\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|})\cdot(|AF|+2|BF|)-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}(1+2+\frac{|AF|}{|BF|}+\frac{2|BF|}{|AF|})-\frac{1}{8}\geqslant\frac{1}{8}(1+2+2\sqrt{2})-\frac{1}{8}=\frac{1+\sqrt{2}}{4}$.

16. 21【解析】令$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$,$C$在线段$AB$的中垂线上,设$AB$的中点为$P$,$\therefore\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}$,$2\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=2(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC})\cdot\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BA}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=[(\overrightarrow{OA})^2-(\overrightarrow{OB})^2]=(5^2-2^2)=21$.

17. $[\ln2-1,+\infty)$【解析】令$f(x)=\mathrm{e}^x-ax+b-1$,则$f'(x)=\mathrm{e}^x-a$,可知,$(-\infty,\ln a)$递减,$(\ln a,+\infty)$递增. $\therefore f(x)_{\min}=a-a\ln a+b-1\geqslant0$成立. $\therefore b\geqslant a\ln a-a+1$,令$y=x\ln x-x+1$,$\therefore y'=\ln x+1-1=\ln x$,则可得$(0,1)$递减,$(1,+\infty)$递增. 又$\because\frac{b-a+1}{a}=\frac{b+1}{a}-1$,即$\frac{b+1}{a}$就是曲线$y$上的点与$(0,-1)$连线的斜率,设曲线$y$上$x_0$处的切线方程为$y-(x_0\ln x_0-x_0+1)=\ln x_0(x-x_0)$,将点$(0,-1)$代入上述切线方程,解得$x_0=2$,$\therefore(\frac{b+1}{a})_{\min}=\frac{2\ln2-2+1+1}{2}=\ln2$,得$\frac{b-a+1}{a}=\frac{b+1}{a}-1\in[\ln2-1,+\infty)$.

三、解答题

18. (Ⅰ)$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})\cdot\sin(x-\frac{\pi}{6})=-\sin(x+\frac{\pi}{3})\cdot\sin(\frac{\pi}{6}-x)=-\sin(x+\frac{\pi}{3})\cdot\sin[\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{3})]=-\sin(x+\frac{\pi}{3})\cdot\cos(x+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$,由题意,函数$f(x)$的最小正周期为$\pi$,令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi$,$\therefore f(x)$的单调递增区间为$[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(Ⅱ)$f(\frac{A}{2})=-\frac{1}{2}\sin(A+\frac{2\pi}{3})=\frac{5}{26}$,$\therefore\sin(A+\frac{2\pi}{3})=-\frac{5}{13}$,$\therefore 0<A<\pi$,$\frac{2\pi}{3}<A+\frac{2\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$,又$-\frac{1}{2}<-\frac{5}{13}<0$,$\therefore A+\frac{2\pi}{3}$为第三象限角,$\therefore\cos(A+\frac{2\pi}{3})=-\frac{12}{13}$,$\therefore\cos A=\cos[(A+\frac{2\pi}{3})-\frac{2\pi}{3}]=\cos(A+\frac{2\pi}{3})\cdot\cos\frac{2\pi}{3}+\sin(A+\frac{2\pi}{3})\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{12}{13}\cdot(-\frac{1}{2})+(-\frac{5}{13})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{12-5\sqrt{3}}{26}$.

19. (Ⅰ)由题意可得$P\text{-}AB'C'D$是一个正四棱锥. 过A,C'分别作PD的垂线,垂足为M(两垂足重合),由题意得$\angle AMC'=\frac{2\pi}{3}$,在$\triangle AMC'$中,可得$C'M=$

$\sqrt{6}$，易得 $DM=\sqrt{3}$．在 Rt△$C'PM$ 中，令侧棱长 $PC'=x$，则 $x^2=(x-\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2$，得 $x=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．

∴$P-AB'C'D$ 是侧棱长为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，底边长为 3 的正四棱锥，得△PEF 为 Rt△．∴$PE\perp PF$，$PE\perp AD$，得证．

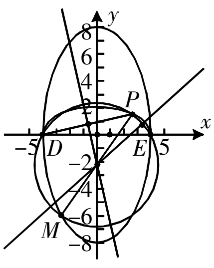
（Ⅱ）连接 EF,EG，在三棱锥 $P-EFG$ 中，$V_{P-EFG}=V_{E-FGP}$，由（Ⅰ）得正四棱锥的高为 $\frac{3}{2}$，$S_{\triangle EFG}=\frac{9}{4}$，$S_{\triangle PFG}=\frac{9\sqrt{3}}{8}$，根据等积法可得 E 点到平面 PFG 的距离为 $\sqrt{3}$，令 PE 与平面 PFG 所成角为 θ，

∴$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

20.（Ⅰ）∵$(n-1)a_n-na_{n-1}=3n^2-3n$，∴$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}=3$，∴$\{\frac{a_n}{n}\}$ 是首项为 1，公差为 3 的等差数列，∴$\frac{a_n}{n}=3n-2$，∴$a_n=3n^2-2n$．当 $n=1$ 时，$b_1=\frac{1}{2}$，当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3^n-1}{4}-\frac{3^{n-1}-1}{4}=\frac{3^n-3^{n-1}}{4}=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$，∴$b_n=\frac{3^{n-1}}{2}$．

（Ⅱ）∵$\frac{1}{S_n}=\frac{4}{3^n-1}=\frac{4}{3\cdot 3^{n-1}-1}=\frac{4}{2\cdot 3^{n-1}+3^{n-1}-1}\leqslant\frac{4}{2\cdot 3^{n-1}}=\frac{2}{3^{n-1}}$，∴$T_n\leqslant\frac{2[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}<3$．

21.（Ⅰ）设 $A(m,0)$，$B(0,n)$，$P(x,y)$，$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，则 $x=2(m-x)$，$y-n=2(0-y)$，即 $m=\frac{3}{2}x$，$n=3y$，由 $|AB|=\sqrt{m^2+n^2}=6$，得点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$．



第 21 题图

（Ⅱ）由 $k_{PD}\cdot k_{PE}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{4}$，得 $k_{MD}\cdot k_{ME}=(-\frac{1}{k_{PA}})\cdot(-\frac{1}{k_{PB}})=-4$，设点 $M(x_0,y_0)$，可得 $y_0^2=64-4x_0^2$，$|DM|=\sqrt{-3x_0^2+8x_0+80}$，而 $-4\leqslant x_0\leqslant 4$，∴$|DM|_{\max}=\frac{16}{3}\sqrt{3}$．

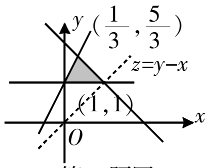
22.（Ⅰ）$f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，由题意得 $(\frac{\ln x}{x})_{\max}\leqslant\frac{a}{2}$，令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $h'(x)>0$ 时，$0<x<\mathrm{e}$；当 $h'(x)<0$ 时，$x>\mathrm{e}$．∴$h(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 递减；$h(x)_{\max}=h(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，即 $a\geqslant\frac{2}{\mathrm{e}}$．

（Ⅱ）令 $f'(x)=\ln x+1-ax(1<x<3)$，令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$t\in(1,\sqrt{3})$，令 $f'(x)+g(x)-10=\ln x+\sqrt{x}+\frac{54}{x+5}-10=\ln t^2+t+\frac{54}{t^2+5}-10$，记 $F(t)=\ln t^2+t+\frac{54}{t^2+5}-10$，则 $F'(t)=\frac{2}{t}+1-\frac{108t}{(t^2+5)^2}=\frac{t^5+2t^4+10t^3-88t^2+25t+50}{t(t^2+5)^2}$．$k(t)=t^5+2t^4+10t^3-88t^2+25t+50$，则 $k'(t)=5t^4+8t^3+30t^2-176t+25=t(5t^3+8t^2+30t-176)+25$，再令 $r(t)=5t^3+8t^2+30t-176$，则 $r'(t)=15t^2+16t+30$，当 $t\in(1,\sqrt{3})$ 时，$r'(t)>0$，∴$r(t)$ 在 $(1,\sqrt{3})$ 上单调递增，∴$r(t)<r(\sqrt{3})=45\sqrt{3}-152<90-152=-62$，∴$k'(t)<0$，∴$k(t)$ 在 $(1,\sqrt{3})$ 上单调递减，∴$k(t)<k(1)=0$，∴$F'(t)<0$，$F(t)$ 在 $(1,\sqrt{3})$ 上单调递减，∴$F(t)<F(1)=0$．所证成立．

优化卷（五）

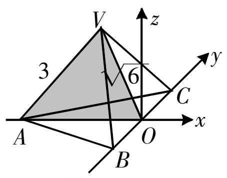
一、选择题

1. B【解析】由 $|x-3|<1$ 知 $2<x<4$，又 $x\in\mathbf{Z}$，∴$A=\{3\}$．再由 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\leqslant 0$，得 $2\leqslant x\leqslant 3$，又 $x\in\mathbf{Z}$，∴$B=\{2,3\}$．于是 $A\cap B=\{3\}$，∴选择 B．



第 3 题图

2. D【解析】$z=\frac{-1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$，∴$|z|=\sqrt{2}$．
3. C【解析】如图所示．
4. A【解析】由图知 $VB=3$，于是 $OB=\sqrt{VB^2-VO^2}=\sqrt{3}$，进而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，三棱锥的高为 $h=\sqrt{5}$（∵顶点 V 在底面的射影为△ABC 的重心），∴$V=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times h=\sqrt{15}$．



第 4 题图

5. A【解析】由面面垂直的性质知平面 β 存在一条直线 m 与平面 α，于是 $m/\!/\alpha$，进而由线面平行的判定定理知 $\alpha/\!/\beta$，∴充分性成立．必要性可以举反例说明不成立，即将平面 β 上一条不垂直于平面 α 的直线平行移出，显然这条直线平行于平面 β，却不垂直于平面 α．

6. C【解析】$2\sin x\xrightarrow[\frac{\pi}{6}]{\text{左移}}2\sin(x+\frac{\pi}{6})\xrightarrow[\frac{1}{2}\text{倍}]{\text{横坐标变为}}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

7. B【解析】$E(\xi)=an+b(n+1)+c(n+2)=n+b+2c$,$D(\xi)=(b+2c)^2\cdot a+(b+2c-1)^2\cdot b+(b+2c-2)^2\cdot c$,∴ 选 B.

8. B【解析】由等差数列前 n 项和 S_n 的函数特性(或函数图象),知 S_{11} 为数列$\{a_n\}$前 n 项和的最值,∴$a_{11}\cdot a_{12}<0$,于是 a_1 与 a_{11} 同号,∴D 选项错误;又由 $S_5=S_{17}$ 知 $S_{10}=S_{12}$,∴$a_{11}+a_{12}=S_{12}-S_{10}=0$,∴C 选项错误;又 ∵$d$ 与 a_1 异号,a_1 与 a_{11} 同号,∴$da_{11}<0$,A 选项错误;B 选项正确(可以结合图象来说明 a_{12} 与 S_{12} 的符号特性).

9. D【解析】设直线 AB:$y=k(x-t)$,联立 $y^2=4x$,得 $k^2x^2-(2k^2t+4)x+k^2t^2=0$,∴$x_A+x_B=2t+\frac{4}{k^2}$,$x_A\cdot x_B=t^2$. 由$\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{QB}$知 $x_A+2x_B=3x_Q=6$,解得 $x_A=2(2t+\frac{4}{k^2})-6$,$x_B=6-(2t+\frac{4}{k^2})$,∴$x_A\cdot x_B=t^2=[6-(2t+\frac{4}{k^2})][2(2t+\frac{4}{k^2})-6]=-2[(2t+\frac{4}{k^2})-\frac{9}{2}]^2+\frac{9}{2}$,∴$t_{\max}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

10. D【解析】$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$,易知 $f(x)$在$[-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递增,在$[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递减,即 $f(x)$ 在区间$(-\frac{3\pi}{4}+n\pi,\frac{\pi}{4}+n\pi)$,$n\in\mathbf{N}^*$ 上是单调函数. 又 $f(-\frac{3\pi}{4}+n\pi)=(-1)^{n+1}e^{-\frac{3\pi}{4}+n\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-1$,$f(\frac{\pi}{4}+n\pi)=(-1)^n e^{\frac{\pi}{4}+n\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-1$,当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,显然 $f(-\frac{3\pi}{4}+n\pi)\cdot f(\frac{\pi}{4}+n\pi)<0$,∴$f(x)$在$(-\frac{3\pi}{4}+n\pi,\frac{\pi}{4}+n\pi)$,$n\in\mathbf{N}^*$ 有唯一零点,此零点即为 x_n,∴$e^{x_n}\cos x_n-1=0$. 又 $f(y_n)=e^{y_n}\cos y_n-1=e^{x_n-(n-1)\pi}\cos[x_n-(n-1)\pi]-1=(-1)^{n-1}e^{-(n-1)\pi}e^{x_n}\cos x_n-1=(-1)^{n-1}e^{-(n-1)\pi}-1$,∴$\{f(y_{2n})\}$为单调递增数列,$\{f(y_{2n-1})\}$为单调递减数列. 又 $y_n=x_n-(n-1)\pi\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$且函数 $f(x)$在$(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$上单调递减,∴$\{y_{2n}\}$为单调递减数列,$\{y_{2n-1}\}$为单调递增数列.

二、填空题.

11. 1　$5\sqrt{2}$

12. $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$　3

13. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$　(1,2)【解析】显然 $A=105°$,由正弦定理 $\frac{a}{\sin105°}=\frac{b}{\sin30°}$,得 $b=\frac{1}{\sin105°}=\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$;由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin30°}$,得 $\sin A=\frac{1}{b}$,∴$\begin{cases}\frac{1}{b}<1\\ b<2\end{cases}\Rightarrow 1<b<2$.

14. 2　2【解析】$ab(a+2b)=\frac{1}{2}a\cdot2b\cdot(a+2b)\leqslant\frac{1}{2}(a+2b)\cdot(\frac{a+2b}{2})^2$,∴$(a+2b)^3\geqslant8$,∴$a+2b\geqslant2$,当且仅当 $a=1$,$b=\frac{1}{2}$时等号成立;$\frac{2}{a}=2b(a-2b)\leqslant(\frac{2b+a-2b}{2})^2$,∴$a\geqslant2$,当且仅当 $b=\frac{1}{2}$等号成立.

15. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$【解析】$|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}|=4\Leftrightarrow\sqrt{1+x^2+2x\cos\theta}+\sqrt{1+x^2-2x\cos\theta}=4$,变形得 $\sqrt{1+x^2+2x\cos\theta}=4-\sqrt{1+x^2-2x\cos\theta}$,两边平方得 $2\sqrt{1+x^2-2x\cos\theta}=4-x\cos\theta$,再两边平方得 $x^2=\frac{12}{4-\cos^2\theta}\geqslant\frac{7}{2}$,∴$|\cos\theta|\geqslant\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

16. 25【解析】先让甲、乙、丙选物品的种类,每人都有三种选择:练习本、笔、练习本和笔,于是选择方案共有 27 种(∵ 此时物品种类选好,∴ 数量的分配就确定了),但甲、乙、丙三人均只选练习本或均只选笔都会造成物品不能分配完毕,∴ 原问题的分配方案有 25 种.

17. $12-8\sqrt{2}$【解析】易知 $f'(x)=x^2-2ax$,原问题等价于$\forall a\in\mathbf{R}$,$\max\limits_{x\in[0,2]}|f'(x)|\geqslant k$. ①当 $a\leqslant0$ 或 $a\geqslant2$ 时,$\max|f'(x)|=\max\{|f'(0)|,|f'(2)|\}=|4a-4|$;②当 $0<a<2$ 时,$\max|f'(x)|=\max\{|f'(0)|,|f'(2)|,|f'(a)|\}=\max\{|4a-4|,a^2\}$. 令 $g(a)=\begin{cases}|4a-4|,a\leqslant0\text{ 或 }a\geqslant2\\ \max\{|4a-4|,a^2\},0<a<2\end{cases}$,∴ 原问题又等价于 $g(a)\geqslant k$,由图象知 $g(a)_{\min}=g(2\sqrt{2}-2)=12-8\sqrt{2}$.

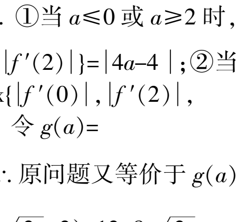
三、解答题

18. (Ⅰ)$f(x)=\sin x+m\cos(x+\frac{\pi}{3})=\sin x+m(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)=\frac{m}{2}\cos x+(-\frac{\sqrt{3}}{2}m+1)\sin x$,

∴$-\frac{\sqrt{3}}{2}m+1=0\Rightarrow m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(Ⅱ)$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos(x+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\cos(x+\frac{\pi}{6})$,∴$x+\frac{\pi}{6}=2k\pi$,即 $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.

19. (Ⅰ)证明:连接 EB,由题意 $EB^2=ED^2+DB^2=5$,∴$DE\perp DB$,又 $DE\perp DA$,$DA\cap DB=D$,∴$DE\perp$平面 DAB.



第 19 题图

(Ⅱ)如图,建立空间直角坐标系 $D-xyz$(F 为 AB 中点,x 轴$/\!/AB$),易知 $\overrightarrow{DA}=(-1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{DC}=(1,0,1)$,设平面 ADC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

$\therefore\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=-x+\sqrt{3}\,y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=x+z=0\end{cases}$，取 $y=1$，解得 $x=\sqrt{3}$，$z=-\sqrt{3}$. 于是 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$. 又 $\overrightarrow{AE}=(1,-\sqrt{3},1)$，设 AE 与平面 ADC 所成角的大小为 θ，$\therefore\sin\theta=\left|\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AE}|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{105}}{35}$.

20. (Ⅰ)当 $n=2k$ 时，$a_{2k+2}=3a_{2k}$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的偶子列是以 3 为首项，3 为公比的等比数列，于是 $a_n=a_2q^{\frac{n}{2}-1}=3^{\frac{n}{2}}$；当 $n=2k-1$ 时，$a_{2k+1}=a_{2k-1}+2$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的奇子列是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，于是 $a_n=a_1+(\dfrac{n+1}{2}-1)d=n$，$\therefore a_n=\begin{cases}n, n\text{ 为奇数}\\ 3^{\frac{n}{2}}, n\text{ 为偶数}\end{cases}$.

(Ⅱ)$b_n=a_{2n-1}\cdot a_{2n}=(2n-1)\cdot 3^n$，于是 $S_n=1\times3^1+3\times3^2+\cdots+(2n-1)\cdot3^n$，$3S_n=1\times3^2+\cdots+(2n-3)\cdot3^n+(2n-1)\cdot3^{n+1}$，相减得 $2S_n=(2n-1)\cdot3^{n+1}-3-2\ (3^2+3^3+\cdots+3^n)=(2n-1)\cdot3^{n+1}-3-2\times\dfrac{9(1-3^{n-1})}{1-3}=(2n-2)\cdot3^{n+1}+6$，$\therefore S_n=(n-1)\cdot3^{n+1}+3$.

21. (Ⅰ)由抛物线弦的斜率公式知 $k_{OP}=\dfrac{4}{y_1}$，$k_{MQ}=\dfrac{4}{y_0+y_2}$，$\because MQ/\!/OP$，$\therefore\dfrac{4}{y_1}=\dfrac{4}{y_0+y_2}$，即 $y_0=y_1-y_2$.

(Ⅱ)$\because M(\dfrac{y_0^2}{4},y_0)$，$\therefore OM$：$y=\dfrac{4}{y_0}x$. 又 $\because k_{PQ}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$，$\therefore PQ$：$y-y_1=\dfrac{4}{y_1+y_2}(x-\dfrac{y_1^2}{4})$. 于是联立解得 $\dfrac{4}{y_0}x-y_1=\dfrac{4}{y_1+y_2}(x-\dfrac{y_1^2}{4})$，即 $(\dfrac{4}{y_0}-\dfrac{4}{y_1+y_2})x=y_1-\dfrac{y_1^2}{y_1+y_2}=\dfrac{y_1y_2}{y_1+y_2}$，$\therefore x_N=\dfrac{1}{4}\ \dfrac{y_1y_2}{y_1+y_2-y_0}\cdot y_0=\dfrac{1}{4}\ \dfrac{(y_0y_1)y_2}{y_1+y_2-y_0}=-\dfrac{1}{2}$，又 $y_0y_1=-4$，$\therefore\dfrac{y_2}{y_1+y_2-y_0}=-\dfrac{1}{2}$，即 $y_0=y_1-y_2$，于是由(Ⅰ)可知 $k_{OP}=k_{MQ}$，即 $MQ/\!/OP$.

22. (Ⅰ)$f'(x)=e^x-1$，$\therefore f(x)$ 单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

(Ⅱ)$f(x)\geqslant\dfrac{1}{2a}x^2+a\Leftrightarrow e^x-x\geqslant\dfrac{1}{2a}x^2+a$，再整理得 $2a^2-2(e^x-x)a+x^2\leqslant0$，又 $1=f(0)\geqslant a$，$\therefore\dfrac{1}{2}<a\leqslant1$. 下面证明 $\forall a\in(\dfrac{1}{2},1]$，关于 x 的不等式 $2a^2-2(e^x-x)a+x^2\leqslant0$ 在 $[0,+\infty)$ 恒成立. 令 $g(a)=2a^2-2(e^x-x)a+x^2$，$\therefore$ 问题等价于 $\begin{cases}g(\frac{1}{2})=x^2+x+\frac{1}{2}-e^x\leqslant0\ ①\\ g(1)=x^2+2x+2-2e^x\leqslant0\ ②\end{cases}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立. 下面对①，②的成立性进行证明：对于①，$x^2+x+\dfrac{1}{2}-e^x\leqslant0\Leftrightarrow\ln(x^2+x+\dfrac{1}{2})-x\leqslant0$，令 $g(x)=\ln(x^2+x+\dfrac{1}{2})-x$，$\therefore$①等价于证明 $\max g(x)\leqslant0$，$\because$

$$g'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{1}{2}}-1=\frac{-x^2+x+\frac{1}{2}}{x^2+x+\frac{1}{2}}=\frac{-(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2})}{x^2+x+\frac{1}{2}}$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty)$ 上单调递减.

$\therefore\max g(x)=g(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2})=\ln(2+\sqrt{3})-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}<0$.

$\therefore$①得证. 对于②，$x^2+2x+2-2e^x\leqslant0\Leftrightarrow\ln(x^2+2x+2)-x-\ln2\leqslant0$，令 $k(x)=\ln(x^2+2x+2)-x-\ln2$，$\therefore k'(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}-1=\dfrac{-x^2}{x^2+2x+2}\leqslant0$，$\therefore k(x)\leqslant k(0)=0$，$\therefore$②得证. 综上 $\dfrac{1}{2}<a\leqslant1$.