台州市 2019学年第一学期 高三年级期末质量评估试卷

数学参考答案

2020.01

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1—5：A B B C D　6—10：A C D B D

二、填空题（本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分）

11．1，$\sqrt{17}$　　12．1，5　　13．$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　14．103

15．$\dfrac{7}{25}$，$\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$　　16．36，1　　17．$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

三、解答题（本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

18．（本小题满分为 14 分）

解：（Ⅰ）在△ABC 中，因为 $AB=3$，$BC=5$，$CD=7$，$\angle ABC=120^\circ$，

所以 $AC^2=AB^2+BC^2-2\times AB\times BC\times\cos\angle ABC=49$，

所以 $AC=7$．　……………4 分

由正弦定理可得 $\dfrac{AB}{\sin\alpha}=\dfrac{AC}{\sin120^\circ}$，

所以 $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$；　………………8 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得 $\cos\alpha=\dfrac{13}{14}$，　………………10 分

在△ACD 中，根据余弦定理 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\alpha$，………12 分

所以 $AD=\sqrt{7}$．　……………14 分

19.（本小题满分为 15 分）

（Ⅰ）证明：假设 $DE//$ 平面 BFC，

因为 $AE//CF$，$AE\not\subset$ 平面 BFC，

所以 $AE//$ 平面 BFC，　…………………………………3 分

又因为 $DE//$ 平面 BFC，$AE\bigcap DE=E$，

所以平面 $ADE//$ 平面 BFC，　………………………………5 分

根据面面平行的性质定理可得 $AD//BC$，

所以 $\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{CO}{OA}$，

因为 $AB=AD$， $AO\perp BD$，所以 $BO=OD$，这与 OC=2OA 矛盾，

所以 DE 不平行平面 BFC．　　　　　　　　　　　　…………………7 分

（Ⅱ）解法一：因为 $AE\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $AE\perp BD$，

又因为 $BD\perp AC$， $AC\bigcap AE=A$，

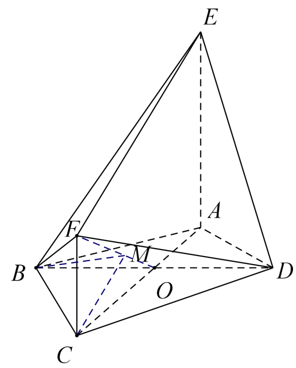
所以 $BD\perp$ 平面 $AEFC$．　　　　　　　　　　　　………………9 分

连接 OF，作 $CM\perp OF$ 于点 M，连接 BM，

由 $BD\perp$ 平面 $AEFC$，可得 $BD\perp CM$，

因为 $BD\bigcap OF=O$，所以 $CM\perp$ 平面 FBD，

所以 $\angle CBM$ 为直线 BC 与平面 BFD 所成的角，…12 分



在 Rt△OFC 中，$CO=2$，$CF=1$，则 $CM=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

又因为 $CB=\sqrt{7}$，

所以直线 BC 与平面 BFD 所成的角的正弦值为

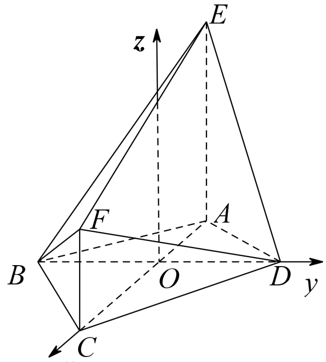
$$\sin\angle CBM=\frac{CM}{CB}=\frac{2\sqrt{35}}{35}.$$ …………………15 分

解法二：以 O 为坐标原点，建系如图，根据已知条件可得：

$B\left(0,-\sqrt{3},0\right)$，$C\left(2,0,0\right)$，$D\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$E\left(-1,0,2\right)$，$F\left(2,0,1\right)$，……9 分

所以 $\overrightarrow{BC}=\left(2,\sqrt{3},0\right),\overrightarrow{DB}=\left(0,-2\sqrt{3},0\right)$，

$\overrightarrow{DF}=\left(2,-\sqrt{3},1\right)$，



（第 19 题）

设平面 BFD 的法向量 $\boldsymbol{n}=\left(x,y,z\right)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DB}\bullet\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DF}\bullet\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}-2\sqrt{3}y=0,\\ 2x-\sqrt{3}y+z=0,\end{cases}$

则 $y=0$，取 $x=1$， $z=-2$，

所以平面 BFD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=\left(1,0,-2\right)$，　　　　　　………………12 分

直线 BC 与平面 BFD 所成的角的正弦值为

$$\sin\theta=\frac{\left|\overrightarrow{BC}\bullet\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}\right|}=\frac{2\sqrt{35}}{35}.$$ …………………………………………15 分

20．（本小题满分为 15 分）

（Ⅰ）解：因为 $a_n=\begin{cases}S_n-S_{n-1},n\geq 2,\\ S_1,n=1,\end{cases}=\begin{cases}2n-1,n\geq 2,\\ 1,n=1,\end{cases}=2n-1$， …………………… 4 分

设等比数列 $\{b_n\}$ 公比为 q，因为 $b_1=1$，

由 $2b_2=b_1+b_3-4$，可得 $q^2-2q-3=0$，解得 $q=3$ 或 -1（不符，舍去）；

所以 $b_n=3^{n-1}$． ……………………………… 8 分

（Ⅱ）解法一：因为 $n\geq 2$ 时，$3^n-1=(1+2)^n-1>-1+1+2C_n^1+2^2C_n^2>2n+1$，

根据“若 $a>b>0,m>0$，则 $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m}$” 可得

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}-1}=\frac{2n+1}{3^n-1}\leq\frac{2(n+1)}{3^n}\ （n\geq 2），$$

所以 $\dfrac{a_2}{b_2-1}+\dfrac{a_3}{b_3-1}+\cdots+\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}-1}\leq\dfrac{3}{2}+\dfrac{2\times 3}{3^2}+\cdots+\dfrac{2\times(n+1)}{3^n}$， ………12 分

令 $T_n=\dfrac{2\times 3}{3^2}+\dfrac{2\times 4}{3^3}+\cdots+\dfrac{2\times(n+1)}{3^n}$，

$\dfrac{1}{3}T_n=\qquad\dfrac{2\times 3}{3^3}+\dfrac{2\times 4}{3^4}+\cdots+\dfrac{2\times n}{3^n}+\dfrac{2\times(n+1)}{3^{n+1}}$，

两式相减可得 $\dfrac{2}{3}T_n=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2\times 1}{3^3}+\dfrac{2\times 1}{3^4}+\cdots+\dfrac{2\times 1}{3^n}-\dfrac{2\times(n+1)}{3^{n+1}}$

$$=\frac{2}{3}+\frac{\frac{2}{3^3}\left(1-\frac{1}{3^{n-2}}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2\times(n+1)}{3^{n+1}}$$

$$=\frac{7}{9}-\frac{1}{3^n}-\frac{2\times(n+1)}{3^{n+1}},$$

所以$T_n < \frac{7}{6}$，

所以$\frac{a_2}{b_2-1}+\frac{a_3}{b_3-1}+\cdots+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}-1}<\frac{7}{6}+\frac{3}{2}=\frac{8}{3}<3$． ………………………………15 分

解法二：令$c_n=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}-1}=\frac{2n+1}{3^n-1}$，下一步用分析法证明“$\frac{c_{n+1}}{c_n}<\frac{1}{2}$”，

要证$\frac{c_{n+1}}{c_n}<\frac{1}{2}$，即证$\frac{(2n+3)(3^n-1)}{(3^{n+1}-1)(2n+1)}<\frac{1}{2}$，

即证$(4n+6)(3^n-1)<(2n+1)(3^{n+1}-1)$，

即证$-2n-5<(2n-3)3^n$，

当$n\in\mathbf{N}^*$，显然成立，所以$\frac{c_{n+1}}{c_n}<\frac{1}{2}$，

所以$c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{3}{2}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{2n+1}{3^n-1}\le\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}+\cdots+\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right)<3$． ………………………………15 分

（注：学生用其他方式放缩求和，酌情给分）

21.（本小题满分为 15 分）

（I）证明：设直线$l:y=kx+\frac{1}{2}$，与抛物线$C:y^2=x$联立可得$ky^2-y+\frac{1}{2}=0$，

所以$\begin{cases} y_1+y_2=\frac{1}{k}, \\ y_1y_2=\frac{1}{2k}, \\ \Delta=1-2k>0, \end{cases}$ ……………………3 分

所以$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=2$； ……………………7 分

（Ⅱ）由$\Delta>0$，可得$k<\frac{1}{2}$，

因为点$A\left(y_1^2,y_1\right)$在P,B之间，所以$y_1=\frac{1-\sqrt{1-2k}}{2k}=\frac{1}{1+\sqrt{1-2k}}$，

所以$y_1\in\left(0,1\right)$，……………………………………………9 分

由已知可设点$D\left(y_1^2,y_D\right)$，由点D在直线$OB:y=\frac{1}{y_2}x$上可得$y_D=\frac{y_1^2}{y_2}$，

所以△OAD的面积$S=\frac{1}{2}\times y_1^2\times\left(y_1-\frac{y_1^2}{y_2}\right)$，

因为$\frac{1}{y_2}=2-\frac{1}{y_1}$，

所以$S=\frac{1}{2}\times y_1^2\times\left(y_1-y_1^2\left(2-\frac{1}{y_1}\right)\right)=y_1^3-y_1^4$．……………………13 分

因为$S'=y_1^2\left(3-4y_1\right)$，

所以当$y_1=\frac{3}{4}$, 即$k=\frac{4}{9}$时，△OAM的面积S的最大值$\frac{27}{256}$ . ...15 分

（注：用不等式求解亦可）

22.（本小题满分为 15 分）

解法一：（Ⅰ）解：因为$f\left(x\right)=\left(x+2\right)\ln\left(1+x\right)$，

所以$f'\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)+\frac{x+2}{x+1}$，……………………………2 分

可得$f'\left(0\right)=2$，

所以$f\left(x\right)$在$x=0$处的切线方程$y=2x$；……………………………4 分

（II）解：因为$x>0$，所以$\ln\left(x+1\right)-\frac{ax}{x+2}>0$恒成立，

令$h\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-\frac{ax}{x+2}$，

所以$h'\left(x\right)=\frac{1}{x+1}-\frac{2a}{\left(x+2\right)^2}=\frac{x^2+\left(4-2a\right)x+4-2a}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)^2}$，…………………6 分

⑴当$a\le 2$时，$x^2+\left(4-2a\right)x+4-2a>0$，所以$h'\left(x\right)>0$，

所以$h\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-\frac{ax}{x+2}>h\left(0\right)=0$（符合题意）；…………………8 分

⑵当$a>2$时，设$g(x)=x^2+(4-2a)x+4-2a$，
因为二次函数$g(x)$开口向上，$g(0)=4-2a<0$，
所以存在$x_0\in(0,+\infty)$，使得$g(x_0)=0$，
当$x\in(0,x_0)$时，$g(x)<0$，可得$h'(x)<0$，因此$h(x)$在$(0,x_0)$单调递减，
所以当$x\in(0,x_0)$时，$h(x)<h(0)=0$（矛盾，舍去）.
综上，$a\le 2$． ………………10分

（III）证明：当$a>2$时，因为$x>-1$，所以函数$f(x)$的零点个数等价于

函数$h(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+2}$的零点个数， …………………11分

由（Ⅰ）可得$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2a}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+(4-2a)x+4-2a}{(x+1)(x+2)^2}$，

设$g(x)=x^2+(4-2a)x+4-2a$，

因为二次函数$g(x)$在$x\in\mathbf{R}$时，$g(-1)=1>0$，$g(0)=4-2a<0$，

所以存在$x_1\in(-1,0),x_2\in(0,+\infty)$，使得$g(x_1)=0$，$g(x_2)=0$，

所以$h(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+2}$在$(-1,x_1)$单调递增，$(x_1,0)$单调递减，

$(0,x_2)$单调递减，$(x_2,+\infty)$单调递增. …………………13分

因为$h(0)=0$，所以$h(x_1)>0$ ，$h(x_2)<0$，

又因为当$x=e^{-a}-1$，$h(e^{-a}-1)=-a-\dfrac{a(e^{-a}-1)}{e^{-a}+1}=-a\left(\dfrac{2e^{-a}}{e^{-a}+1}\right)<0$，

所以$h(x)$在$(e^{-a}-1,x_1)$存在一个零点；

当$x=e^a-1$时，$h(e^a-1)=a-\dfrac{a(e^a-1)}{e^a+1}=a\left(\dfrac{2}{e^a+1}\right)>0$，

所以$h(x)$在(x_2,e^a-1)存在一个零点；

所以，当$a>2$时，函数$f(x)$恰有3个零点. ……………… 15分

（注：若用当$x\to-1$，函数$h(x)<0$代替$h(e^{-a}-1)=-a-\dfrac{a(e^{-a}-1)}{e^{-a}+1}=-a\left(\dfrac{2e^{-a}}{e^{-a}+1}\right)<0$；

若用当$x\to+\infty$，函数$h(x)>0$代替$h(e^a-1)=a-\dfrac{a(e^a-1)}{e^a+1}=a\left(\dfrac{2}{e^a+1}\right)>0$；酌情扣1分）

解法二 （I）同解法一； ………………………………4 分

（II）求导可得 $f'(x)=\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}+1-a$ ，$f'(0)=2-a$，

对导函数求导数得 $f''(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ ，

当 $x>0$ 时恒有 $f''(x)>0$，即 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增.，……………6 分

①当 $a\le 2$ 时，则 $f'(0)=2-a\ge 0$，由 $f'(x)$ 的单调性知，在 $[0,+\infty)$ 上，$f'(x)\ge 0$，

故 $f(x)$ 递增，注意到 $f(0)=0, f(x)>0$ 恒成立； …………………8 分

②当 $a>2$，则 $f'(0)=2-a<0$，作为连续函数，存在 $0<\delta<1$，使得 $f'(x)<0$ 在

区间 $[-\delta,\delta]$ 上成立，$f(x)$ 在此区间递减，注意到 $f(0)=0$，在区间 $[0,\delta]$ 上

$f(x)<0$，与题意矛盾. …………………10 分

综上，$a\le 2$.

（III）已有 $f(0)=0$，

当 $a>2$ 时，我们证明：在区间 $(-1,0),(0,+\infty)$ 函数 $f(x)$ 还各有一个零点 . …………11 分

① 若 $x\in(-1,0)$，则 $f''(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}<0$，$f'(x)$ 递减，

取 $x_1=e^{-a}-1$，则 $x_1\in(-1,0)$，计算可得 $f'(x_1)=e^a-2a+1$，

当 $a>2$ 时运用导数易证 $f'(x_1)>0$，又 $f'(0)=2-a<0$，

于是存在唯一一点 $x_0\in(x_1,0)$ ，使得 $f'(x_0)=0$，

在区间 $(-1,x_0)$，$f'(x)>0$；在区间 $(x_0,0)$，$f'(x)<0$.

即函数 $f(x)$ 先增后减, 其中极大值 $f(x_0)>0$.（因为 $f(0)=0$）

然而，$f(x_1)=-a(x_1+2)-ax_1=-a(2+2x_1)<0$，

故在区间 $(-1,0)$ 上函数 $f(x)$ 有唯一零点在 (x_1,x_0) 内. ....13 分

② 若 $x\in\left(0,+\infty\right)$，则 $f'\left(x\right)$ 递增.

取 $x_2=e^a-1$, 则 $x_2\in\left(0,+\infty\right)$，计算可得 $f'\left(x_2\right)=e^{-a}+1>0$，

与①同理可得，$f\left(x\right)$ 先减后增有唯一的极小值点，且极小值为负，

但由于 $f\left(0\right)=0$，而 $f\left(x_2\right)=a\left(x_2+2\right)-ax_2>0$ ，

故在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上函数 $f\left(x\right)$ 有唯一零点.

综上，函数 $f\left(x\right)$ 恰有三个零点. ....15 分

（注：若用当 $x\to-1$，函数 $f\left(x\right)<0$ 代替 $f\left(x\right)=-a\left(x_1+2\right)-ax_1=-a\left(2+2x_1\right)<0$；
若用当 $x\to+\infty$，函数 $f\left(x\right)>0$ 代替 $f\left(x_2\right)=a\left(x_2+2\right)-ax_2>0$；酌情扣 1 分）