

# 2019 学年第一学期五校联考试题高三年级 数学试题卷

## 考生须知:

1. 本卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟;
2. 答题前, 在答题卷指定区域填写学校、班级、姓名、试场号、座位号及准考证号。
3. 所有答案必须写在答题卷上, 写在试卷上无效;
4. 考试结束后, 只需上交答题卷。

## 参考公式:

如果事件  $A, B$  互斥, 那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件  $A, B$  相互独立, 那么

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$$

如果事件  $A$  在一次试验中发生的概率是  $p$ , 那么  $n$  次独立重复试验中事件  $A$  恰好发生  $k$  次的概率

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

台体的体积公式

$$V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$$

其中  $S_1, S_2$  分别表示台体的上、下底面积,

$h$  表示台体的高

柱体的体积公式

$$V=Sh$$

其中  $S$  表示柱体的底面积,  $h$  表示柱体的高

锥体的体积公式

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

其中  $S$  表示锥体的底面积,  $h$  表示锥体的高

球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

球的体积公式

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

其中  $R$  表示球的半径

一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A=\{x|\lg x>0\}$ ,  $B=\{x|x^2\leq 4\}$ , 则  $A\cap B=$  ( )  
A.  $(1,2)$       B.  $[1,2]$       C.  $(0,2]$       D.  $(1,+\infty)$
2. 已知向量  $|\vec{a}|=1$ ,  $|\vec{b}|=2$ , 且  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $60^\circ$ , 则 ( )  
A.  $\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$       B.  $\vec{b}\perp(\vec{a}+\vec{b})$       C.  $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$       D.  $\vec{b}\perp(\vec{a}-\vec{b})$
3. 函数  $f(x)=\frac{3^x}{3^x+2^x}$  的值域为 ( )  
A.  $[1,+\infty)$       B.  $(1,+\infty)$   
C.  $(0,1]$       D.  $(0,1)$
4. 已知数列  $\{a_n\}$  是公差为  $d$  的等差数列, 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 则 ( )  
A.  $d<0$  时,  $S_n$  一定存在最大值      B.  $d>0$  时,  $S_n$  一定存在最大值  
C.  $S_n$  存在最大值时,  $d<0$       D.  $S_n$  存在最大值时,  $d>0$
5. 已知关于  $x$  的不等式  $ax^2-2x+3a<0$  在  $(0,2]$  上有解, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )  
A.  $(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3})$       B.  $(-\infty, \frac{4}{7})$       C.  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$       D.  $(\frac{4}{7}, +\infty)$

6. 已知  $a, b$  为实数, 则  $0 < b < a < 1$ , 是  $\log_a b > \log_b a$  的 ( )
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 定义  $\max\{a, b\} = \begin{cases} a & a \geq b \\ b & a < b \end{cases}$ , 则关于实数  $x, y$  的不等式组  $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| \leq 2 \\ \max\{x+y, x-y\} \geq 0 \end{cases}$ , 所表示的平面区域的面积是 ( )
- A. 4 B. 6 C. 8 D. 12
8. 函数  $f(x) = \sin 2x + 2\cos x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ), 则  $f(x)$  ( )
- A. 在  $[0, \frac{\pi}{3}]$  上递增 B. 在  $[0, \frac{\pi}{6}]$  上递减  
C. 在  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  上递减 D. 在  $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$  上递增
9. 在三角形 ABC 中, 已知  $\frac{\sin A}{\sin B} + \cos C = 0$ ,  $\tan A = \frac{\sqrt{2}}{4}$ , 则  $\tan B =$  ( )
- A.  $\sqrt{2}$  B.  $2\sqrt{2}$  C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. 若不等式  $(|x-a|-b)\sin(\pi x + \frac{\pi}{6}) \leq 0$  对  $x \in [-1, 1]$  上恒成立, 则  $a+b =$  ( )
- A.  $\frac{2}{3}$  B.  $\frac{5}{6}$  C. 1 D. 2

二、填空题: 本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分。

11. 已知集合  $A = \{x | 2x^2 - x - 1 < 0\}$ ,  $B = \{x | a < x < b\}$ . 若  $A \cup B = \{x | -2 < x < 1\}$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_; 若  $(C_R A) \cap B = \{x | 1 \leq x < 3\}$ , 则  $b =$  \_\_\_\_\_.
12. 已知  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 若  $\sin^2 \alpha + \sin 2\alpha = 1$ , 则  $\tan \alpha =$  \_\_\_\_\_;  $\sin 2\alpha =$  \_\_\_\_\_.
13. 不等式  $2^{3x-1} < (\frac{1}{2})^{1-2x}$  的解集是 \_\_\_\_\_, 不等式  $\log_2(3x-1) < \log_{\frac{1}{2}} 4$  的解集是 \_\_\_\_\_.
14. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 满足  $S_n = (-1)^n a_n - (\frac{1}{2})^n$  ( $n \in N^*$ ), 则  $a_3 =$  \_\_\_\_\_,  $S_7 =$  \_\_\_\_\_.
15. 定义  $\max\{a, b\} = \begin{cases} a & a \geq b \\ b & a < b \end{cases}$ , 已知  $f(x) = \max\{|x+1|+1, 2x\}$ ,  $g(x) = ax+b$ , 若  $f(x) \leq g(x)$  对  $x \in [1, +\infty)$  恒成立, 则  $2a+b$  的最小值是 \_\_\_\_\_.
16. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , 其中  $|\vec{a}-\vec{b}|=2, |\vec{a}-\vec{c}|=1$ ,  $\vec{b}$  与  $\vec{c}$  夹角为  $60^\circ$ , 且  $(\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{c}) = -1$ , 则  $|\vec{a}|$  的最大值为 \_\_\_\_\_.
17. 已知实数  $a, b$  满足:  $2b^2 - a^2 = 4$ , 则  $|a-2b|$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

三、解答题:本大题共 5 小题,共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. (本题满分 14 分) 已知  $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} \cos x$ ,  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边为  $a, b, c$

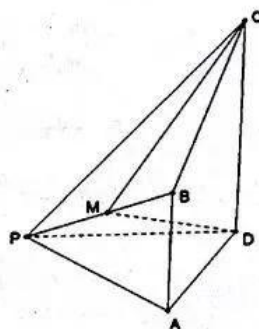
(I) 若  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , 求  $f(x)$  的值域

(II) 若  $f(A) = \frac{1}{3}$ ,  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 2$ , 求  $\sin B$  的值.

19. (本题满分 15 分) 已知多面体  $P-ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle BAD = \angle PAB = 90^\circ$ ,  $AB = PA = DA = PD = \frac{1}{2}DC$ ,  $M$  为  $PB$  中点.

(I) 求证:  $PA \perp CM$ ;

(II) 求直线  $BC$  与平面  $CDM$  所成角的正弦.



20. (本题满分 15 分) 设数列  $\{a_n\}$  是等比数列, 数列  $\{b_n\}$  是等差数列, 若  $a_2 = b_2 = 3$ ,  $a_3 = b_5 = 9$

(I) 若  $c_n = \frac{n \cdot b_n}{a_n}$ , 数列  $\{c_n\}$  中的最大项是第  $k$  项, 求  $k$  的值;

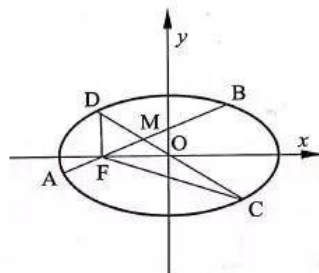
(II) 设  $d_n = a_n \cdot b_n$ , 求数列  $\{d_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

21. (本题满分 15 分) 过椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  的左焦点  $F$  作斜率为  $k_1$  ( $k_1 \neq 0$ ) 的直线交椭圆于  $A, B$  两点,

$M$  为弦  $AB$  的中点, 直线  $OM$  交椭圆于  $C, D$  两点.

(1) 设直线  $OM$  的斜率为  $k_2$ , 求  $k_1 k_2$  的值;

(2) 若  $F, B$  分别在直线  $CD$  的两侧,  $|MB|^2 = |MC| \cdot |MD|$ , 求  $\triangle FCD$  的面积.



22. (本题满分 15 分) 设函数  $f(x) = e^x + a\sqrt{x+1}$ ,  $x \geq -1$

(I) 当  $a = -1$  时, 若  $x_0$  函数  $f(x)$  的极值点, 求证:  $-\frac{1}{2} < x_0 < 0$ ;

(II) (i) 求证: 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + a\sqrt{x+1}$

(ii) 若不等式  $2 + \frac{5}{4}x + \frac{a}{2}x^2 \leq \frac{f(x)}{a}$  对任意  $x \geq 0$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

注:  $e = 2.71828\cdots$  为自然对数的底数.