2026届高三年级第一次质量检测

数学

注意事项：

1．本试卷共4页，满分150分，考试时间120分钟.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在试卷和答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合 $A=\{x|x<3\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{1,2\}$　　B. $\{3,4\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

【答案】A

【解析】

【分析】由交集运算法则可得结果.

【详解】由交集运算可知，$\{x|x<3\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,2\}$.

故选：A.

2. 已知复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】根据复数的乘法和除法运算求出 z，再根据复数的模求解.

【详解】因为 $(1+\mathrm{i})z=\mathrm{i}$，所以 $z=\frac{\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{i}+1}{2}$，故 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故选：B

3. 已知 $\log_2 m-\log_2 n=1$，则（　　）

A. $mn=2$　　B. $m-n=2$

C. $2m=n$　　D. $m=2n$

【答案】D

【解析】

【分析】根据对数运算求得正确答案.

【详解】依题意，$\log_2 m-\log_2 n=\log_2\frac{m}{n}=1$，所以$\frac{m}{n}=2,m=2n$.

故选：D

4. 已知$f(x)=\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^{-x}$，则“$a^2=1$”是“$f(x)$为奇函数”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】充分性证明：根据$a^2=1$，解得a代入$f(x)$并根据奇函数定义判断；必要性证明：根据奇函数定义求a，再对比题干中a的值.

【详解】证明充分性：因为$a^2=1$，解得$a=\pm1$，当$a=1$时，$f(x)=e^x+e^{-x}$，则$f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$，所以$f(x)$是偶函数；

当$a=-1$时，$f(x)=e^x-e^{-x}$，则$f(-x)=e^{-x}-e^x=-\left(e^x-e^{-x}\right)=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数，故不充分.

证明必要性：若$f(x)$为奇函数，则$f(-x)=e^{-x}+ae^x=-f(x)=-\left(e^x+ae^{-x}\right)$，即

$e^{-x}+ae^x=-\left(e^x+ae^{-x}\right)$，

整理得$\left(e^x+e^{-x}\right)(a+1)=0$，因为$e^x+e^{-x}\ge2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$，所以$a=-1$，即$a^2=1$，故必要，

综上所述“$a^2=1$”是“$f(x)$为奇函数”的必要不充分条件，

故选：B.

5. 设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_2$作平行于$y$轴的直线交$C$于$A,B$两点，若$\triangle ABF_1$是等边三角形，则$C$的离心率为（　　）

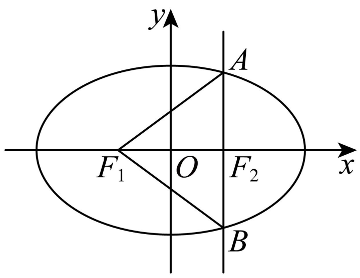
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　C. $2-\sqrt{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】由题意求出$|F_1A|$，$|F_2A|$之间关系，利用椭圆的定义及勾股定理，即可求出离心率.

【详解】因为$\triangle ABF_1$是等边三角形，$AB\perp x$轴，



所以$|F_2A|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}|F_1A|$，故$|F_1A|=2|F_2A|$，

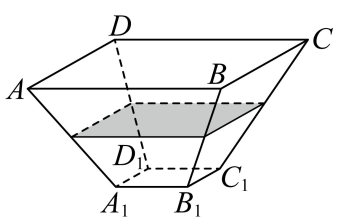
所以$|F_1A|+|F_2A|=3|F_2A|=2a$，解得$|F_2A|=\frac{2}{3}a,|F_1A|=\frac{4}{3}a$；

又$|F_1F_2|=\sqrt{|F_1A|^2-|F_2A|^2}=\sqrt{\frac{16}{9}a^2-\frac{4}{9}a^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a=2c$，

所以椭圆C的离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：A

6. “方斗”是中国古代盛米的一种重要容器，其形状是一个上大下小的正四棱台．如图所示，在一个盛满米的“方斗”容器中，$AB=4,A_1B_1=2$，若从中取出74kg米后，米的高度下降一半，则剩余的米的质量为（　　）



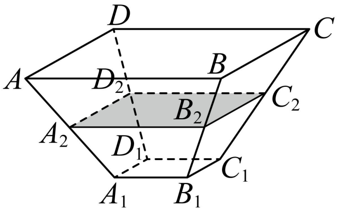
A. 38kg　　B. 48kg　　C. 57kg　　D. 112kg

【答案】A

【解析】

【分析】假设从“方斗”中取出74kg米后，米的高度下降一半至平面$A_2B_2C_2D_2$处.分析出取出米的质量与

剩余的米的质量之比为正四棱台 $ABCD-A_2B_2C_2D_2$ 和 $A_2B_2C_2D_2-A_1B_1C_1D_1$ 的体积之比，再根据棱台的体积公式分别求出两个棱台的体积即可得解.

【详解】

假设从“方斗”中取出 74kg 米后，米的高度下降一半至平面 $A_2B_2C_2D_2$ 处，

由题意可知正四棱台 $ABCD-A_2B_2C_2D_2$ 和 $A_2B_2C_2D_2-A_1B_1C_1D_1$ 的高相等，设为 h.

因为 $AB=4, A_1B_1=2$，所以 $A_2B_2=3$.

则 $V_{ABCD-A_2B_2C_2D_2}=\dfrac{1}{3}h\left(4^2+4\times3+3^2\right)=\dfrac{37}{3}h$，

$V_{A_2B_2C_2D_2-A_1B_1C_1D_1}=\dfrac{1}{3}h\left(3^2+3\times2+2^2\right)=\dfrac{19}{3}h$.

设剩余的米的质量为 $x\text{kg}$，

则 $\dfrac{V_{ABCD-A_2B_2C_2D_2}}{V_{A_2B_2C_2D_2-A_1B_1C_1D_1}}=\dfrac{\frac{37}{3}h}{\frac{19}{3}h}=\dfrac{37}{19}=\dfrac{74}{x}$，解得 $x=38$，

所以剩余的米的质量为 38kg.

故选：A

7. 菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle A=60^\circ, M$ 为 CD 的中点，N 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=$（　　）

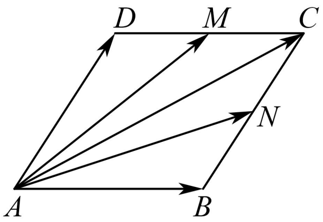
A. $2+\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$　　　　B. $4+\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$　　　　C. $\dfrac{9}{2}$　　　　D. $\dfrac{13}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量的运算法则可得 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right), \overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，然后利用向量的数量积定义即可求得.

【详解】如图，连接 AM, AN, AC，则 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=2, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}=60^\circ$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$；



所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}=2\times2\cos60^{\circ}=2$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}^{2}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2^{2}+2=6$，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}^{2}=2+2^{2}=6$，

$\overrightarrow{AC}^{2}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)^{2}=\overrightarrow{AB}^{2}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^{2}=2^{2}+2\times2\times2\times\cos60^{\circ}+2^{2}=12$；

因为 M 为 CD 的中点，N 为 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right),\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$；

所以

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}^{2}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\left(6+12+2+6\right)=\frac{13}{2}$.

故选：D.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $B=\frac{2\pi}{3},b^{2}=6ac$，则 $\cos A+\cos C=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{14}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{39}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{42}}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】先由两角和差的余弦公式经过拆角变形为 $\cos A+\cos C=2\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)$，再由正弦定理边化角得到 $\sin A\sin C=\frac{1}{8}$，然后由两角和差的余弦公式再拆角，结合二倍角的余弦公式计算可得.

【详解】因为 $B=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow A+C=\frac{\pi}{3}$，

$\cos A+\cos C=\cos\left(\frac{A+C}{2}+\frac{A-C}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+C}{2}-\frac{A-C}{2}\right)=2\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)$，

$\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由正弦定理可知$b^2=6ac\Rightarrow\sin^2 B=6\sin A\sin C\Rightarrow\sin A\sin C=\frac{1}{8}$，

$\sin A\sin C=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+C\right)-\cos\left(A-C\right)\right]$即$\frac{1}{8}=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\cos\left(A-C\right)\right]\Rightarrow\cos\left(A-C\right)=\frac{3}{4}$，

因为$A-C\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$，故$\frac{A-C}{2}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$，

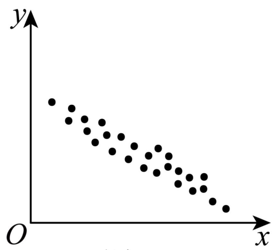
所以$\cos\left(A-C\right)=2\cos^2\frac{A-C}{2}-1=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$，

所以$\cos A+\cos C=2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{4}=\frac{\sqrt{42}}{4}$.

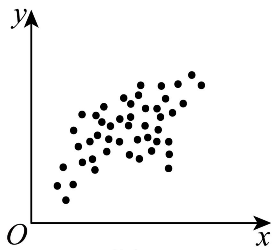
故选：D.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 以下是不同成对样本数据的散点图，则下列说法正确的是（　　）



图(1)



图(2)

A. 图（1）中成对样本数据呈负相关

B. 图（1）中成对样本数据的线性相关程度比图（2）中强

C. 图（1）中成对样本数据的相关系数大于图（2）中成对样本数据的相关系数

D. 若从图（2）样本中抽取一部分，则这部分的相关系数不变

【答案】AB

【解析】

【分析】根据相关系数的定义和意义进行辨析即可.

【详解】对于 A：图（1）中，随着x增大，y整体呈减小趋势，因此成对样本数据呈负相关，A 正确；

对于 B：图（1）中数据点更贴近直线，线性相关程度比图（2）（数据点分散）强，B 正确；

对于 C：图（1）的线性相关性强，负相关的相关系数接近-1；图（2）线性相关性弱，相关系数绝对值小（接近 0）.

因此图（1）的相关系数（负数，绝对值大）小于图（2）的相关系数（接近 0），C 错误；

对于 D：从图（2）中抽取部分样本，数据分布会改变，相关系数会变化，D 错误.

故选：AB.

10. 已知直线$l:ax+by=1$与圆$C:x^2+y^2=1$，设点$P(a,b)$，则下列说法正确的是（　　）

A. 若点P在直线l上，则直线l与圆C相切

B. 若点P在圆C外，则直线l与圆C相离

C. 若点P在圆C内，且异于原点，则直线l与圆C相离

D. 若点P在圆C上，则直线l与x轴，y轴围成的三角形面积的最小值为 1

【答案】ACD

【解析】

【分析】通过计算圆心到直线的距离，结合点与圆的位置关系（点的坐标满足的不等式），判断直线与圆的位置关系；对面积问题，利用基本不等式推导最小值.

【详解】由题意得圆$C:x^2+y^2=1$的圆心为$O(0,0)$，半径$r=1$，

圆心到直线$l:ax+by=1$的距离$d=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

选项 A：　点$P(a,b)$在直线l上，则$a^2+b^2=1$，此时$d=\frac{1}{\sqrt{1}}=1=r$，

直线l与圆C相切，故 A 正确.

选项 B：　点P在圆C外，则$a^2+b^2>1$，此时$d=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1=r$，

直线l与圆C相交，故 B 错误.

选项 C：　点P在圆C内，则$a^2+b^2<1$，此时$d=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}>1=r$，

直线l与圆C相离，故 C 正确.

选项 D：　点P在圆C上，则$a^2+b^2=1$.

直线l与x轴交于$\left(\frac{1}{a},0\right)$（$a\neq0$），与$y$轴交于$\left(0,\frac{1}{b}\right)$（$b\neq0$），

围成三角形的面积为$S=\frac{1}{2|ab|}$.

由$a^2+b^2\geq2|ab|$，得$|ab|\leq\frac{1}{2}$，故$S\geq1$，

当且仅当$|a|=|b|=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号，面积最小值为 1，故 D 正确.

故选：ACD

11. 已知正方体$A_1A_2A_3A_4-A_5A_6A_7A_8$的棱长为 1，定义$A=\left\{\overrightarrow{A_iA_j}\middle| i,j\in I,且i\neq j\right\}$，$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，若$\vec{a},\vec{b}\in A$，则$|\vec{a}+\vec{b}|$的值可以是（　　）

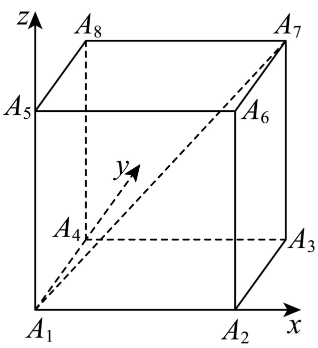
A. $\sqrt{5}$　　　　B. $\sqrt{6}$　　　　C. $\sqrt{7}$　　　　D. 3

【答案】ABD

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，可得到$\overrightarrow{A_iA_j}$坐标的集合，根据题意可得$\vec{a}+\vec{b}$的坐标，取值验证 ABD，分析 C 不成立即可.

【详解】建立如图所示的空间直角坐标系，



则$A_1(0,0,0)$，$A_2(1,0,0)$，$A_3(1,1,0)$，$A_4(0,1,0)$，$A_5(0,0,1)$，$A_6(1,0,1)$，$A_7(1,1,1)$，$A_8(0,1,1)$，

所以$\overrightarrow{A_iA_j}$的坐标集合为$B=\{(1,0,0),(-1,0,0),(1,1,0),(-1,-1,0),(0,1,0),(0,-1,0),(0,0,1),(0,0,-1),$

$(1,0,1),(-1,0,-1),(1,1,1),(-1,-1,-1),(0,1,1),(0,-1,-1),(-1,1,0),(1,-1,0),(-1,0,1),(1,0,-1),$

$(-1,1,1),(1,-1,-1),(-1,-1,1),(1,1,-1),(0,-1,1),(0,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,-1)\}$，

又由$A=\left\{\overrightarrow{A_iA_j}\middle| i,j\in I,且i\neq j\right\}$，$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$\vec{a},\vec{b}\in A$，

所以$\vec{a},\vec{b}\in B$，不妨取$\vec{a}=(1,0,0),\vec{b}=(1,1,0)$，则$\vec{a}+\vec{b}=(2,1,0)$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4+1+0}=\sqrt{5}$，故 A 正确；

不妨取$\vec{a}=(1,0,0),\vec{b}=(1,1,1)$，则$\vec{a}+\vec{b}=(2,1,1)$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$，故 B 正确；

由于$1^2+1^2+1^2<7,2^2+2^2>7$，所以$7=2^2+1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$，但是观察集合 B，$\vec{a}+\vec{b}$的横、纵、竖坐标中不可能有$\pm\sqrt{2}$，故 C 错误.

不妨取 $\vec{a}=(1,0,1),\vec{b}=(1,1,1)$，则 $\vec{a}+\vec{b}=(2,1,2)$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4+1+4}=3$，故 D 正确.

故选：ABD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_4+a_5=8$，则 $S_8=$_____.

【答案】32

【解析】

【分析】由等差数列的求和公式和下标的性质计算可得.

【详解】因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_4+a_5=8$，

所以 $S_8=\dfrac{8(a_1+a_8)}{2}=4(a_4+a_5)=32$.

故答案为：32.

13. 写出一个同时具有下列性质①②的函数 $f(x)=$_____.

① $f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$；②当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>1$.

【答案】3^x（答案不唯一，$f(x)=a^x(a\geq \mathrm{e})$ 均满足）

【解析】

【分析】设 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，验证函数 $f(x)$ 满足性质①，从而确定函数为指数函数. 求导数 $f'(x)$，分 $0<a<1$ 和 $a>1$ 两种情况讨论，验证是否满足②，当 $a>1$ 时，再利用函数的单调性求出 a 的取值范围即可得解.

【详解】设 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$.

因为 $f(x_1)f(x_2)=a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$，$f(x_1+x_2)=a^{x_1+x_2}$，

且 $f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$，故 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 满足①.

因为 $f'(x)=a^x\ln a$，要使 $f'(x)>1$ 恒成立，即 $a^x\ln a>1$ 恒成立.

若 $0<a<1$，则 $\ln a<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$a^x\in(0,1)$，

$a^x\ln a<0$，不满足性质②；

若 $a>1$，$\ln a>0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$a^x>1$，所以 $a^x\ln a>1$ 可能成立.

当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

故函数 $y=a^x\ln a$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上也单调递增，

所以其函数值大于 $\lim\limits_{x\to 0^+}a^x\ln a=\ln a$，

所以要使 $a^x\ln a>1$ 恒成立，只需满足 $\ln a\geq 1$，解得 $a\geq \mathrm{e}$.

故当 $a\geq \mathrm{e}$ 时，$f\left(x\right)=a^x\left(a>0,a\neq 1\right)$ 满足性质②，

所以 $f\left(x\right)=3^x$（答案不唯一，$f\left(x\right)=a^x\left(a\geq \mathrm{e}\right)$ 均满足）.

故答案为：3^x（答案不唯一，$f\left(x\right)=a^x\left(a\geq \mathrm{e}\right)$ 均满足）

14. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_1 作直线分别交两条渐近线于点 A,B，交 y 轴于点 D,O 为坐标原点．若 $\triangle AF_1F_2$ 的面积是 $\triangle OBF_1$ 的面积的 3 倍，则 $\dfrac{|BD|}{|AD|}=$_____.

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】

【分析】根据已知条件求出双曲线渐近线方程、焦点坐标、点 A,B,D 的坐标，然后利用面积比列出等式，最后根据两点距离公式列出 $\dfrac{|BD|}{|AD|}$ 的表达式，进行化简即可求得结果.

【详解】因为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，

所以 $F_1\left(-c,0\right),F_2\left(c,0\right)$，渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

因为过点 F_1 的直线与 y 轴有交点 D，所以该直线的斜率存在，

设该直线方程为 $y=k\left(x+c\right)$，则 $D\left(0,kc\right)$，该直线与渐近线方程联立得

$\begin{cases}y=k\left(x+c\right)\\ y=\dfrac{b}{a}x\end{cases}$，解得 $A\left(\dfrac{kac}{b-ak},\dfrac{kbc}{b-ak}\right)$.

$\begin{cases}y=k\left(x+c\right)\\ y=-\dfrac{b}{a}x\end{cases}$，解得 $B\left(-\dfrac{kac}{b+ak},\dfrac{kbc}{b+ak}\right)$.

所以$S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2c\times\left|\frac{kbc}{b-ak}\right|=\left|\frac{kb}{b-ak}\right|c^2$，$S_{\triangle OBF_1}=\frac{1}{2}\times c\times\left|\frac{kbc}{b+ak}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{kb}{b+ak}\right|c^2$.

由题意知，$S_{\triangle AF_1F_2}=3S_{\triangle OBF_1}$，所以$\left|\frac{kb}{b-ak}\right|c^2=\frac{3}{2}\left|\frac{kb}{b+ak}\right|c^2$，

化简得$\frac{4}{(b-ak)^2}=\frac{9}{(b+ak)^2}$，所以有$\frac{(b-ak)^2}{(b+ak)^2}=\frac{4}{9}$.

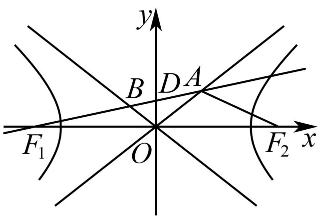
$$|BD|=\sqrt{\left(\frac{kac}{b+ak}\right)^2+\left(\frac{kbc}{b+ak}-kc\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{kac}{b+ak}\right)^2+\left(\frac{k^2ac}{b+ak}\right)^2}=\left|\frac{kac}{b+ak}\right|\sqrt{1+k^2},$$

$$|AD|=\sqrt{\left(\frac{kac}{b-ak}\right)^2+\left(\frac{kbc}{b-ak}-kc\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{kac}{b-ak}\right)^2+\left(\frac{k^2ac}{b-ak}\right)^2}=\left|\frac{kac}{b-ak}\right|\sqrt{1+k^2}$$

所以$\frac{|BD|}{|AD|}=\frac{\left|\frac{kac}{b+ak}\right|\sqrt{1+k^2}}{\left|\frac{kac}{b-ak}\right|\sqrt{1+k^2}}=\left|\frac{b-ak}{b+ak}\right|$，又$\frac{(b-ak)^2}{(b+ak)^2}=\frac{4}{9}$，$\frac{|BD|}{|AD|}>0$.

所以$\frac{|BD|}{|AD|}=\left|\frac{b-ak}{b+ak}\right|=\sqrt{\left(\frac{b-ak}{b+ak}\right)^2}=\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 在直角坐标系xOy中，点P到y轴的距离等于点P到点$F(2,0)$的距离，记动点P的轨迹为W.

（1）求W的方程；

（2）经过点F且斜率为 1 的直线l交W于A，B两点，求$|AB|$.

【答案】（1）$y^2=4(x-1)$

（2）8

【解析】

【分析】（1）先设点P的坐标为(x,y)，再根据题意列式化简即可；

（2）先求出直线l的方程，再利用距离公式即可求出.

【小问 1 详解】

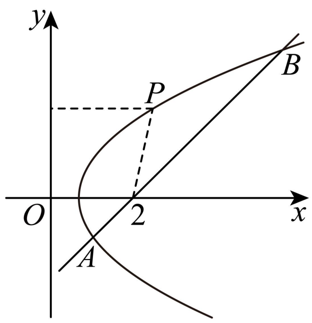
设点P的坐标为$\left(x,y\right)$，依题意得$\left|x\right|=\sqrt{\left(x-2\right)^2+y^2}$，

化简得$y^2=4\left(x-1\right)$，所以W的方程为$y^2=4\left(x-1\right)$.

【小问 2 详解】

直线l过点F且斜率为 1，

$\therefore$直线l为$y-0=1\left(x-2\right)$，即 $y=x-2$，



设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

联立$\begin{cases}y^2=4\left(x-1\right)\\ y=x-2\end{cases}$，化简得：$x^2-8x+8=0$

，则$x_1+x_2=8,x_1x_2=8$，

又$\left|AB\right|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}$，把$y=x-2$代入，

得$\left|AB\right|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_1-2-x_2+2\right)^2}=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_1-x_2\right)^2}=\sqrt{2}\left|x_1-x_2\right|$，

$\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{64-4\times8}=4\sqrt{2}$ ，

$\left|AB\right|=\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=8$.

16. 已知函数$f\left(x\right)=\sin x+a\cos x$，且曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$处的切线斜率为$-\sqrt{2}$.

（1）求实数a的值；

（2）求函数$f\left(x\right)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值与最小值.

【答案】（1）$a=3$

（2）最大值为$\sqrt{10}$，最小值为 1.

【解析】

【分析】（1）由题可得 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$，据此可得答案；

（2）由（1）利用导数可判断 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调性，据此可得答案.

【小问 1 详解】

$f'\left(x\right)=\cos x-a\sin x$，依题意，$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}-a\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}a=-\sqrt{2}$，解之得：$a=3$；

【小问 2 详解】

令 $f'\left(x\right)=\cos x-3\sin x=0$，解之得：$\tan x=\frac{1}{3}$，

令 $g\left(x\right)=f'\left(x\right)$，则 $g'\left(x\right)=-\sin x-3\cos x<0$，所以 $f'\left(x\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，

记 $\tan\theta=\frac{1}{3},\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $x\in\left(0,\theta\right),f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$ 单调递增，$x\in\left(\theta,\frac{\pi}{2}\right),f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$ 单调递减，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $x=\theta$ 处取极大值，

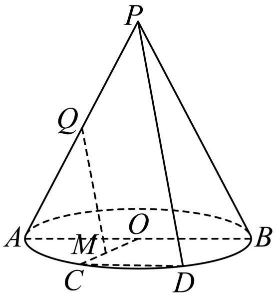
又因为 $\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10},\cos\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以 $f\left(\theta\right)=\sin\theta+3\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{9\sqrt{10}}{10}=\sqrt{10}$，

又 $f\left(0\right)=\sin 0+3\cos 0=3,f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+3\cos\frac{\pi}{2}=1$，

比较可得：函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $\sqrt{10}$，最小值为 1.

17. 如图，P 是圆锥的顶点，O 是底面圆心，AB 是底面直径，Q 是母线 PA 的中点，点 C，D 在底面圆周上，且 $\angle AOC=\frac{\pi}{3}$，点 M 在线段 OC 上，且直线 QM // 平面 PBD .



（1）证明：$CD//AB$；

（2）若$\triangle PAB$是正三角形，求直线PA与平面PBD所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析.

（2）$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

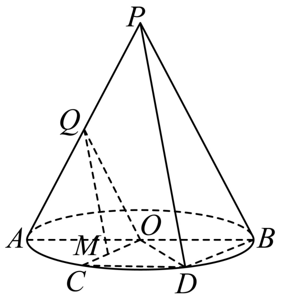
【解析】

【分析】（1）先证明平面$QOC//$平面PBD，再证明四边形$OBDC$是平行四边形即可.

（2）以O为坐标原点建立空间直角坐标系，求出平面PBD的法向量，利用线面角的向量求法即可得出直线PA与平面PBD所成角的正弦值.

【小问1详解】

连接OQ，OD，DB，如图：



因为Q是PA中点，O是AB中点，则$QO//PB$，而$QO\not\subset$平面PBD，

所以$QO//$平面PBD，又因为$QM//$平面PBD，$QM\cap QO=Q$，

所以平面$QOM//$平面PBD，即平面$QOC//$平面PBD.

又平面$QOC\bigcap$平面$ABCD=OC$，平面$PBD\bigcap$平面$ABCD=BD$，所以$OC//BD$，

所以$\angle OBD=\angle AOC=\dfrac{\pi}{3}$，而$OB=OD$，所以$\triangle OBD$是等边三角形，

所以$BD=OD=OC$，又$OC//BD$，所以四边形$OBDC$是平行四边形，

所以$CD // AB$．

【小问2详解】

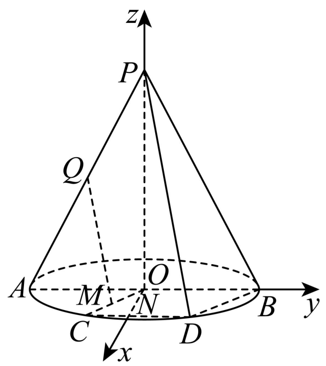
取CD的中点N，连接ON，

由（1）知 $\angle OCD=\angle AOC=\frac{\pi}{3}$，

又$OC=OD$，所以$\triangle OCD$是等边三角形，则$ON\perp CD$，即$ON\perp AB$．

以O为坐标原点，分别以$\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}$为x，y，z轴，

建立空间直角坐标系$O-xyz$，如图所示.



不妨设$AB=2r$，又$\triangle PAB$是正三角形，

则$A(0,-r,0)$，$B(0,r,0)$，$D\left(\frac{\sqrt{3}r}{2},\frac{r}{2},0\right)$，$P(0,0,\sqrt{3}r)$.

则$\overrightarrow{AP}=(0,r,\sqrt{3}r)$，$\overrightarrow{BP}=(0,-r,\sqrt{3}r)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{\sqrt{3}r}{2},-\frac{r}{2},0\right)$

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面PBD的一个法向量，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-ry+\sqrt{3}rz=0\\ \frac{\sqrt{3}r}{2}x-\frac{r}{2}y=0\end{cases}$，

令$x=1$，则得平面PBD的一个法向量$\vec{n}=(1,\sqrt{3},1)$，

所以$\left|\cos\vec{n},\overrightarrow{AP}\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{AP}\right|}=\frac{\sqrt{3}r+\sqrt{3}r}{\sqrt{1+3+1}\cdot\sqrt{r^2+3r^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，

所以，直线PA与平面PBD所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$.

18. 袋子中有4个白球，3个黑球，这些球除颜色外全部相同．现将袋子中的球随机地逐个取出，并将第k

次取出的球放入如图所示的编号为k的抽屉里$\left(k=1,2,3,\cdots\cdots,7\right)$.

1	2	3	4	5	6	7

（1）求编号为2的抽屉里放的是黑球的概率；

（2）记编号为奇数的抽屉里所放白球的总数为X，求X的分布列和数学期望$E\left(X\right)$；

（3）记“从左往右数，任意前i个抽屉中$\left(i=1,2,3,\cdots\cdots,7\right)$，白球总数均不少于黑球总数”为事件$C$，求事件$C$的概率.

【答案】（1）$\dfrac{3}{7}$

（2）分布列见解析，$\dfrac{16}{7}$

（3）$\dfrac{2}{5}$

【解析】

【分析】（1）分第一次取出白球或黑球的情况，通过全概率公式计算编号为2的抽屉里放黑球的概率.

（2）确定X的可能取值，利用组合数计算各取值对应的概率得到分布列，再根据期望公式计算数学期望.

（3）先确定编号为1的抽屉必放白球，分符合条件的不同情况计算概率，求和得到事件C的概率.

【小问1详解】

设$A=$“编号为2的抽屉里放的是黑球”，则$P\left(A\right)=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{3}{6}+\dfrac{3}{7}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{3}{7}$.

【小问2详解】

X的可能取值为1，2，3，4，

$$P\left(X=1\right)=\frac{C_4^1C_3^3}{C_7^4}=\frac{4}{35},P\left(X=2\right)=\frac{C_4^2C_3^2}{C_7^4}=\frac{18}{35},$$

$$P\left(X=3\right)=\frac{C_4^3C_3^1}{C_7^4}=\frac{12}{35},P\left(X=4\right)=\frac{C_4^4}{C_7^4}=\frac{1}{35},$$

用表格表示分布列，如下表所示：

X	1	2	3	4

P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$E(X)=1\times\frac{4}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{12}{35}+4\times\frac{1}{35}=\frac{16}{7}$.

【小问 3 详解】

依题意，编号为 1 的抽屉里放的一定是白球，一共可以分为如下 5 种情况：

①序列前缀为：白黑白白……，$P_1=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{35}$，

②序列前缀为：白黑白黑白……$P_2=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{35}$，

③序列前缀为：白白黑白……，$P_3=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{35}$，

④序列前缀为：白白黑黑白……$P_4=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{35}$，

⑤序列前缀为：白白白……，$P_5=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{35}$，

$P(C)=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5=\frac{14}{35}=\frac{2}{5}$.

19. 若数列$\{a_n\}$满足：对任意$n\in\mathbf{N}^*(n\geq 3)$，总存在$i,j\in\mathbf{N}^*$，使得$a_n=a_ia_j\ (i\neq j,i<n,j<n)$，则称$\{a_n\}$是融积数列．已知数列$\{a_n\}$是融积数列，且$a_1=2,a_2=4$.

（1）求a_3的所有可能取值；

（2）若对任意$n\in\mathbf{N}^*(n\geq 2)$，$a_n>a_{n-1}$，求$a_4$，$a_5$的所有可能取值；

（3）在（2）的条件下，记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，证明：对任意$n\in\mathbf{N}^*$，有$S_n<2a_n$.

【答案】（1）8　　（2）$\begin{cases}a_4=16,\\a_5=32,或a_5=64,或a_5=128,\end{cases}$或$\begin{cases}a_4=32,\\a_5=64,或a_5=128,或a_5=256.\end{cases}$

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据融积数列则$a_3=a_1a_2=2\times4=8$；

（2）因为$a_n > a_{n-1}$，所以数列为递增数列，再结合融积数列的定义分类求解即可；

（3）结合融积数列的定义和（2）的结果，可得$a_n \geq 2a_{n-1}$，所以$a_n \geq 2^{n-k} a_k, k \in \mathbf{N}^*$，利用放缩法得到

$S_n \leq \frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{a_n}{2^{n-2}} + \frac{a_n}{2^{n-3}} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-k}} + \cdots + \frac{a_n}{2} + a_n$，再利用等比数列求和证明得到$S_n < 2a_n$.

【小问 1 详解】

由于两实数相乘满足交换律，以下解答中不妨设$i < j$.

$a_3 = a_1 a_2 = 2 \times 4 = 8$；

【小问 2 详解】

若对任意$n \in \mathbf{N}^* \left(n \geq 2\right)$，$a_n > a_{n-1}$，则$a_4 = a_1 a_3 = 2 \times 8 = 16$，或$a_4 = a_2 a_3 = 4 \times 8 = 32$；

①若$a_4 = 16$，则$a_5 = a_1 a_4 = 2 \times 16 = 32$，或$a_5 = a_2 a_3 = 4 \times 8 = 32$，

或$a_5 = a_2 a_4 = 4 \times 16 = 64$，或$a_5 = a_3 a_4 = 8 \times 16 = 128$；

②若$a_4 = 32$，则$a_5 = a_1 a_4 = 2 \times 32 = 64$，或$a_5 = a_2 a_4 = 4 \times 32 = 128$，

或$a_5 = a_3 a_4 = 8 \times 32 = 256$；

综上，$\begin{cases} a_4 = 16, \\ a_5 = 32, 或 a_5 = 64, 或 a_5 = 128, \end{cases}$或$\begin{cases} a_4 = 32, \\ a_5 = 64, 或 a_5 = 128, 或 a_5 = 256. \end{cases}$

【小问 3 详解】

因为$a_1 = 2, a_2 = 4 = 2^2$，且对任意$n \in \mathbf{N}^* \left(n \geq 3\right)$，总存在$i, j \in \mathbf{N}^*$，

使得$a_n = a_i a_j \left(i \neq j, i < n, j < n\right)$，

所以数列$\left\{a_n\right\}$的任意一项都可以写成 2 的正整数指数幂的形式，

又因为对任意$n \in \mathbf{N}^* \left(n \geq 2\right)$，$a_n > a_{n-1}$，所以$a_n \geq 2a_{n-1}$，

所以$a_n \geq 2a_{n-1} \geq 2^2 a_{n-2} \geq \cdots \geq 2^{n-k} a_k, k \in \mathbf{N}^*$，

所以

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k \cdots + a_{n-1} + a_n \leq \frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{a_n}{2^{n-2}} + \frac{a_n}{2^{n-3}} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-k}} + \cdots + \frac{a_n}{2} + a_n$$

$$= \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-k}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right) a_n$$

$$=\frac{1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]}{1-\frac{1}{2}}\cdot a_n=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]\cdot a_n<2a_n.$$