高三数学试卷参考答案

1. A 【解析】本题考查复数,考查数学运算的核心素养.

$\overline{z}=-1-\mathrm{i}$,$z(\overline{z}+1)=(-1+\mathrm{i})(-\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$.

2. B 【解析】本题考查集合,考查数学运算的核心素养.

由题意知 $A\cap B=\{2,3\}$.

3. C 【解析】本题考查正弦定理,考查数学运算的核心素养.

$B=\pi-A-C=\frac{\pi}{3}$,$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4. C 【解析】本题考查三角恒等变换,考查数学运算的核心素养.

$\frac{\sin\alpha(1-\cos 2\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\times[\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]$

$=\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha-1}\times\frac{2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha-1}\times\frac{2\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{16}{5}$.

5. A 【解析】本题考查抽象函数,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(0)=0$. 令 $x=y=0$,得 $f(0)=a=0$.

6. B 【解析】本题考查椭圆,考查数学运算的核心素养.

不妨设点 M 在第一象限,则 $M\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$,代入椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,得$\frac{a^2}{4a^2}+\frac{a^2}{4b^2}=1$,即 $a^2=3b^2=3a^2-3c^2$,解得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

7. B 【解析】本题考查导数及其应用、充分条件与必要条件,考查逻辑推理及数学运算的核心素养.

若 $a^{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^a$,则 $\mathrm{e}\ln a=a\ln\mathrm{e}$,即 $\ln a-\frac{a}{\mathrm{e}}=0$. 令 $f(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}$,则 $f'(x)=\frac{\mathrm{e}-x}{\mathrm{e}x}$. 当 $x\in(0,\mathrm{e})$时,$f'(x)>0$;当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$时,$f'(x)<0$. $f(x)$在$(0,\mathrm{e})$上单调递增,在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减,$f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=0$,所以方程 $f(x)=0$ 有唯一解,即 $x=\mathrm{e}$,所以方程 $\ln a-\frac{a}{\mathrm{e}}=0$ 的解为 $a=\mathrm{e}$.

若 $\ln a=\log_a\mathrm{e}$,则 $\ln a=\frac{1}{\ln a}$,解得 $\ln a=1$ 或 $\ln a=-1$,所以 $a=\mathrm{e}$ 或 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

故"$\ln a=\log_a\mathrm{e}$"是"$a^{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^a$"的必要不充分条件.

8. D 【解析】本题考查立体几何,考查直观想象的核心素养.

在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$A_1C_1=A_1D=C_1D$,所以$\triangle A_1C_1D$ 为等边三角形. 因为 $A_1D/\!/B_1C$,所以$\angle A_1PC_1$ 或其补角为直线 PC_1 与 B_1C 所成的角.

当点 P 与线段 A_1D 的端点重合时,直线 PC_1 与 B_1C 所成的角取得最小值$\frac{\pi}{3}$;当点 P 与线段 A_1D 的中点重合时,直线 PC_1 与 B_1C 所成的角取得最大值$\frac{\pi}{2}$. 故直线 PC_1 与 B_1C 所成

角的取值范围是$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

9. BCD 【解析】本题考查三角函数,考查逻辑推理的核心素养.

$f(x)=\sin\left|\frac{x}{2}\right|$不是周期函数,A 不符合题意.

$f(x)=\left|\sin\frac{x}{2}\right|$以 2π 为周期且在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增,B 符合题意.

$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,C 符合题意.

$f(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,D 符合题意.

10. ABC 【解析】本题考查直线与直线的方程,考查逻辑推理及数学运算的核心素养.

由题意可得原点 O 到直线 l 的距离小于或等于 1. A,B,C 符合题意.

11. ABD 【解析】本题考查概率,考查逻辑推理及数学运算的核心素养.

对于 A,$P_2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$,$P_4=C_4^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{9}$,所以 $P_2=P_4$,A 正确.

当 $n\geqslant 2$ 时,记事件 $A=$"甲在该比赛中获胜",$B=$"第一局甲赢",$C=$"第二局甲赢".

$P_{2n}=P(A)=P(B\overline{C})P(A|B\overline{C})+P(\overline{B}C)P(A|\overline{B}C)+P(BC)P(A|BC)+P(\overline{B}\,\overline{C})P(A|\overline{B}\,\overline{C})$.

当事件 $B\overline{C}$ 和 $\overline{B}C$ 发生时,要使得甲在该比赛中获胜,则在后续的 $2n-2$ 局比赛中至少要赢 n 局,所以 $P(A|B\overline{C})=P(A|\overline{B}C)=P_{2n-2}$;

当事件 BC 发生时,要使得甲在该比赛中获胜,则在后续的 $2n-2$ 局比赛中赢的局数大于 $n-1$ 或恰好赢了 $n-1$ 局,所以 $P(A|BC)=P_{2n-2}+C_{2n-2}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^{n-1}$;

当事件 $\overline{B}\,\overline{C}$ 发生时,要使得甲在该比赛中获胜,则在后续的 $2n-2$ 局比赛中赢的局数大于 n,可看成事件"在后续的 $2n-2$ 局比赛中赢的局数大于 $n-1$"与事件"在后续的 $2n-2$ 局比赛中恰好赢了 n 局"的差事件,所以 $P(A|\overline{B}\,\overline{C})=P_{2n-2}-C_{2n-2}^{n}p^n(1-p)^{n-2}$.

所以 $P_{2n}=2p(1-p)P_{2n-2}+p^2[P_{2n-2}+C_{2n-2}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^{n-1}]+(1-p)^2[P_{2n-2}-C_{2n-2}^{n}p^n(1-p)^{n-2}]$

$=[2p(1-p)+p^2+(1-p)^2]P_{2n-2}+C_{2n-2}^{n-1}p^{n+1}(1-p)^{n-1}-C_{2n-2}^{n}p^n(1-p)^n$

$=P_{2n-2}+\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}p^n(1-p)^{n-1}[np-(n-1)(1-p)]$

$=P_{2n-2}+\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}p^n(1-p)^{n-1}[1-p-(1-2p)n]$,

即 $P_{2n}-P_{2n-2}=\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}p^n(1-p)^{n-1}[1-p-(1-2p)n]$.

对于 B,若 $p=\frac{1}{4}$,则 $1-p-(1-2p)n=\frac{3}{4}-\frac{n}{2}$,当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{3}{4}-\frac{n}{2}<0$,即 $P_{2n}-P_{2n-2}<0$,所以当 $2n=2$ 时,P_{2n} 最大,B 正确.

对于 C,若 $p=\frac{4}{5}$,则 $1-p-(1-2p)n=\frac{1}{5}+\frac{3n}{5}$,当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{1}{5}+\frac{3n}{5}>0$,即 $P_{2n}-P_{2n-2}>$

0，所以当 $2n=2$ 时，P_{2n} 最小，C 错误.

对于 D，若 $p=\frac{5}{12}$，则 $1-p-(1-2p)n=\frac{7}{12}-\frac{n}{6}$，当 $n\leqslant 3$ 时，$\frac{7}{12}-\frac{n}{6}>0$，当 $n\geqslant 4$ 时，$\frac{7}{12}-\frac{n}{6}<0$，

即当 $n\leqslant 3$ 时，$P_{2n}>P_{2n-2}$，当 $n\geqslant 4$ 时，$P_{2n}<P_{2n-2}$，所以当 $2n=6$ 时，P_{2n} 最大，D 正确.

12. 0.2 **【解析】本题考查正态分布，考查数学运算的核心素养.**

因为 $X\sim N(1,\sigma^2)$，所以 $P(X<1)=P(X>1)=0.5$，$P(X>2)=P(X>1)-P(1<X\leqslant 2)=0.5-0.3=0.2$.

13. -6 **【解析】本题考查平面向量，考查数学运算的核心素养.**

记 AB 的中点为 D，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{OD}^2-\overrightarrow{DA}^2=(\sqrt{3})^2-3^2=-6$.

14. 2 **【解析】本题考查函数，考查逻辑推理及数学运算的核心素养.**

$f(x)$ 为增函数，不妨设 $4>x_1>x_2>0$，则 $|f(x_1)-f(x_2)|=f(x_1)-f(x_2)=2$，即 $\log_3\frac{x_1}{4-x_1}-\log_3\frac{x_2}{4-x_2}=2$，整理得 $x_1-x_2=2x_2(4-x_1)\leqslant 2\left(\frac{x_2+4-x_1}{2}\right)^2=\frac{(4-x_1+x_2)^2}{2}$，解得 $x_1-x_2\leqslant 2$（$x_1-x_2\geqslant 8$ 舍去），当且仅当 $x_1=3$，$x_2=1$ 时，等号成立，所以 $|x_1-x_2|$ 的最大值为 2.

15. **【解析】本题考查统计，考查数据分析的核心素养.**

解：(1)由频数分布表可得 $\overline{x}=\frac{1}{100}\times(10\times 925+11\times 975+22\times 1\ 025+30\times 1\ 075+20\times 1\ 125+7\times 1\ 175)=1\ 055$ kg. ………………………………………… 3 分

$s^2=\frac{1}{100}\times[10\times(925-1\ 055)^2+11\times(975-1\ 055)^2+22\times(1\ 025-1\ 055)^2+30\times(1\ 075-1\ 055)^2+20\times(1\ 125-1\ 055)^2+7\times(1\ 175-1\ 055)^2]=4\ 700$. ………………… 6 分

(2)因为 $s=\sqrt{4\ 700}=10\sqrt{47}<70$， ………………………………………… 7 分

所以 $\overline{x}-\frac{3s}{2}>1\ 055-\frac{3}{2}\times 70=950$，$\overline{x}+\frac{3s}{2}<1\ 055+\frac{3}{2}\times 70=1\ 160$，

所以 $\left(\overline{x}-\frac{3s}{2},\overline{x}+\frac{3s}{2}\right)\subseteq(950,1\ 160)$. ………………………………………… 9 分

亩产量在 $[900,950)$ 内的稻田有 10 块，所以亩产量在 $(950,1\ 160)$ 内的稻田不超过 90 块，即亩产量在 $\left(\overline{x}-\frac{3s}{2},\overline{x}+\frac{3s}{2}\right)$ 内的稻田不超过 90 块. ………………………… 11 分

故该新型水稻不能推广种植. ………………………………………… 13 分

16. **【解析】本题考查双曲线，考查数学运算的核心素养.**

解：(1)因为点 $P(4,3)$ 在双曲线 C 上，所以 $\frac{16}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$. ………………………… 1 分

离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，$c^2=a^2+b^2$，解得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$. ………………………… 3 分

故双曲线 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)①设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1,\\ y=\sqrt{3}x+4,\end{cases}$得 $9x^2+32\sqrt{3}x+76=0$,

则 $x_1+x_2=-\frac{32\sqrt{3}}{9}$,$x_1x_2=\frac{76}{9}$. ………………………………………………………… 6 分

故$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{8\sqrt{21}}{9}$. ………………………………………… 8 分

②$y_1y_2=(\sqrt{3}x_1+4)(\sqrt{3}x_2+4)=3x_1x_2+4\sqrt{3}(x_1+x_2)+16=-\frac{4}{3}$. ……………… 10 分

由题意得点 M,N 都在双曲线C 的左支上,且点 M 在第二象限,所以 $x_2<x_1$,

则 $x_2-x_1=-\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=-\frac{4\sqrt{21}}{9}$. …………………………………… 12 分

故 $k_1k_2=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2+2(x_2-x_1)-4}=\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{76}{9}+2\times\left(-\frac{4\sqrt{21}}{9}\right)-4}=-\frac{15+3\sqrt{21}}{8}$.

……………………………………………………………………………………………… 15 分

17.**【解析】本题考查数列,考查数学运算的核心素养.**

(1)解:因为 $S_n=n^2-2n+t$,所以 $b_n=n-2+\frac{t}{n}$,

则 $b_1=t-1$,$b_2=\frac{t}{2}$,$b_3=1+\frac{t}{3}$. ………………………………………………………… 2 分

因为数列$\{b_n\}$为等差数列,所以 $2b_2=b_1+b_3$,即 $t=t-1+1+\frac{t}{3}$,解得 $t=0$,………… 4 分

所以$\{b_n\}$的公差为 $b_2-b_1=1$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)①解:当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=-2$, ……………………………………………………………… 6 分

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-2n-1-[(n-1)^2-2(n-1)-1]=2n-3$,………… 9 分

故$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}-2,n=1,\\ 2n-3,n\geqslant2.\end{cases}$ …………………………………………… 10 分

②证明:当 $n=1$ 时,$T_1=b_1=-2$,满足 $T_n\leqslant\frac{n^2-3n-2}{2}$. ……………………………… 11 分

当 $n\geqslant2$ 时,$b_n=\frac{S_n}{n}=n-\frac{1}{n}-2<n-2$, …………………………………………………… 12 分

则 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=-2+\left(2-\frac{1}{2}-2\right)+\left(3-\frac{1}{3}-2\right)+\cdots+\left(n-\frac{1}{n}-2\right)$………

……………………………………………………………………………………………… 13 分

$< -2+(2-2)+(3-2)+\cdots+(n-2)=\dfrac{n^2-3n-2}{2}$.

综上，$T_n \leqslant \dfrac{n^2-3n-2}{2}$. ………………………………………………………………………… 15 分

18.**【解析】本题考查空间向量与立体几何，考查直观想象及数学运算的核心素养.**

(1)证明：如图，分别延长两个正四棱台的侧棱，得到正四棱锥 $P\text{-}EFGH$ 及正四棱锥 $Q\text{-}EFGH$，…………………………………………………………………………………………… 1 分

所以 $PE=PG=QE=QG$. ……………………………………………………………………………… 2 分

连接 EG，FH，记 $EG\cap FH=R$，连接 PR，QR. 在正四棱锥 $P\text{-}EFGH$ 及正四棱锥 $Q\text{-}EFGH$ 中，$PR\perp$平面 $EFGH$，$QR\perp$平面 $EFGH$，所以直线 PR 与 QR 是同一条直线. 因为 $PQ\cap EG=R$，所以 P，E，G，Q 四点共面，所以四边形 $PEQG$ 为菱形，所以 $BG/\!/EJ$. ……………………………………………………………………………………………… 4 分

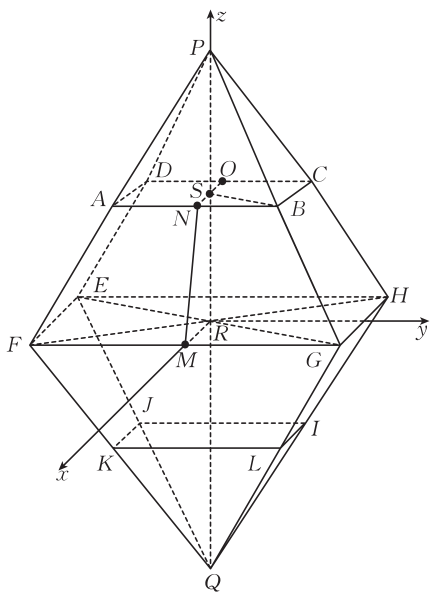
(2)解：连接 ON，MN.

因为过点 M，N，O 的平面截该几何体所得的截面是边长为 2 的正六边形，

所以 $ON=MN=2$，$GH=FG=4$. ………………………………………………………………… 6 分

故 $BG=\sqrt{MN^2+(MG-NB)^2}=\sqrt{5}$. ………………………………………………………… 8 分

(3)解：记正方形 $ABCD$ 的中心为 S，连接 SB，RM. 以 R 为坐标原点，RM 所在直线为 x 轴建立如图所示的空间直角坐标系. 设 $PR=h$，则 $P(0,0,h)$，$G(2,2,0)$，$H(-2,2,0)$，所以 $\overrightarrow{HG}=(4,0,0)$，$\overrightarrow{PG}=(2,2,-h)$.
………………………………………………………… 9 分



记平面 $CBGH$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{HG}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PG}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4x=0,\\ 2x+2y-hz=0,\end{cases}$

取 $y=h$，则 $\boldsymbol{m}=(0,h,2)$. ………………………… 10 分

同理可得平面 $ABGF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(h,0,2)$.
………………………………………………………… 11 分

$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{4}{\sqrt{h^2+2^2}\cdot\sqrt{h^2+2^2}}=\dfrac{1}{4}$，

解得 $h=2\sqrt{3}$，……………………………………………………………………………………… 13 分

所以正四棱锥 $P\text{-}EFGH$ 的体积 $V_1=\dfrac{1}{3}S_{\text{正方形}EFGH}\cdot h=\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$.

因为该几何体的体积为$\dfrac{56\sqrt{3}}{3}$，所以正四棱台 $DABC\text{-}EFGH$ 的体积 $V_2=\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$，

则正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积 $V_3=V_1-V_2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………… 14 分

$RG=2\sqrt{2}$.设 $AB=a$,则 $SB=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

因为$\triangle PSB\backsim\triangle PRG$,所以$\dfrac{PS}{PR}=\dfrac{SB}{RG}$,所以 $PS=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$,………………………………… 16 分

则 $V_3=\dfrac{1}{3}S_{\text{正方形}ABCD}\cdot PS=\dfrac{1}{3}a^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}a}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,解得 $AB=a=2$. ……………………… 17 分

19.**【解析】本题考查导数及其应用,考查逻辑推理的核心素养.**

(1)证明:令函数 $h(x)=\cos 2x+2x,x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$,则 $h'(x)=-2\sin 2x+2>0$, …… 2 分

所以 $h(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上单调递增, ……………………………………………………………… 3 分

则 $h(x)<h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\cos 2x+2x<\dfrac{\pi}{2}$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上恒成立. ……………………… 4 分

(2)证明:因为 $f'(x)=\dfrac{4\sin 2x}{(\cos 2x)^2}>0$,所以 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上单调递增. ……………… 5 分

由(1)得 $\cos 2x+2x<\dfrac{\pi}{2}$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上恒成立,所以 $f(x)=\dfrac{2}{\cos 2x}-n>\dfrac{1}{\frac{\pi}{4}-x}-n$. ………

…………………………………………………………………………………………………… 6 分

令$\dfrac{1}{\frac{\pi}{4}-x}-n=0$,解得 $x=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n}\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$,

所以存在 $x_0=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n}\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$,使得 $f(x_0)=\dfrac{2}{\cos 2x_0}-n>\dfrac{1}{\frac{\pi}{4}-x_0}-n=0$. ………… 7 分

因为 $f(0)=2-n<0$,所以 $f(x)$在$(0,x_0)$上有 1 个零点,即 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上恰有 1 个零点. …………………………………………………………………………………………………… 8 分

(3)解:令 $g(x)=e^{ax}-\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$,即 $e^{ax}=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,等价于 $\ln\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}=ax$.

记 $F(x)=\ln\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}-ax,x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$g(x)$在$\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$上的零点个数即 $F(x)$在$\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$上的零点个数. ……………… 9 分

$x=0$ 是 $F(x)$的 1 个零点.

因为 $F(-x)=\ln\dfrac{1+\tan(-x)}{1-\tan(-x)}+ax=-\ln\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}+ax=-F(x)$,所以 $F(x)$是奇函数,

则 $F(x)$在$\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$和$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上的零点个数相同. ………………………………… 10 分

$F'(x)=\dfrac{2(\tan^2x+1)}{1-\tan^2x}-a=\dfrac{2}{\cos 2x}-a$,$F'(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上单调递增. ……………… 11 分

当 $a\leqslant 2$ 时，$F'(x)>2-a\geqslant 0$，$F(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增. 因为 $F(0)=0$，所以 $F(x)>0$ 在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上恒成立，即 $F(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上没有零点，

所以 $F(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$上只有 1 个零点. ………………………………………… 12 分

当 $a>2$ 时，由(2)可得 $F'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上恰有 1 个零点，记该零点为 x_1.

当 $x\in(0,x_1)$时，$F'(x)<0$，当 $x\in\left(x_1,\frac{\pi}{4}\right)$时，$F'(x)>0$，

所以 $F(x)$在$(0,x_1)$上单调递减，在$\left(x_1,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增. ………………………… 13 分

$F(x)=\ln\frac{1+\tan x}{1-\tan x}-ax>\ln\frac{1+\tan x}{1-\tan x}-\frac{\pi a}{4}$. ………………………………… 14 分

令 $\ln\frac{1+\tan x}{1-\tan x}-\frac{\pi a}{4}=0$，解得 $\tan x=\frac{e^{\frac{\pi a}{4}}-1}{e^{\frac{\pi a}{4}}+1}=1-\frac{2}{e^{\frac{\pi a}{4}}+1}$.

因为 $0<1-\frac{2}{e^{\frac{\pi a}{4}}+1}<1$，所以存在 $x_2\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，使得 $\tan x_2=1-\frac{2}{e^{\frac{\pi a}{4}}+1}$，即 $\ln\frac{1+\tan x_2}{1-\tan x_2}-\frac{\pi a}{4}=0$，$F(x_2)>0$. ………………………………………………………………… 15 分

因为 $F(0)=0$，所以 $x\in(0,x_1)$，$F(x)<0$，所以 $x_2\in\left(x_1,\frac{\pi}{4}\right)$，

所以 $F(x)$在(x_1,x_2)上有 1 个零点，即 $F(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上有 1 个零点，

所以 $F(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$上有 3 个零点. ………………………………………… 16 分

综上，当 $a\leqslant 2$ 时，$g(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$上只有 1 个零点；

当 $a>2$ 时，$g(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$上有 3 个零点. ………………………………… 17 分