

本试卷共6页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (x, -1)$. 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线, 则 $x =$

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

(2) 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | a < x < 2\}$. 若 $a \in \mathbf{Z}$, 且 $A \cap B = \{1\}$, 则 $a =$

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

(3) 已知 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$. 若动点 P 满足 $|PA| - |PB| = 2$, 则 P 的轨迹的方程为

- (A) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ (B) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 (x \leq -1)$
(C) $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ (D) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 (x \geq 1)$

(4) 在 $(x + \frac{a}{x^2})^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 -10 , 则 $a =$

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

(5) 圆心为 $(-1, 2)$ 且与 x 轴相切的圆的方程是

- (A) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$ (B) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$
(C) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ (D) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

(6) 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, $abc \neq 0$, 且 $a > b > c$, 则

- (A) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} > 2$ (B) $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} < 2$ (C) $2a > b + c$ (D) $a + b > c$

(7) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, 其中 $a_1=b_1=1$, $a_3=b_3=3$, 则

- (A) $a_4 < b_4$ (B) $a_4 > b_4$ (C) $a_5 < b_5$ (D) $a_5 > b_5$

(8) 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是非零平面向量, 则 “ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < a^2$ ” 是 “ $|\mathbf{b}| < |\mathbf{a}|$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(9) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = \cos 2B$, 则 $\frac{a}{b}$ 的一个可能的取值为

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) 3

(10) 中华人民共和国国家标准 (GB11533-2011) 中的《标准对数视力表》采用的是五分视力记录方式 (缪氏记录法): $L = 5 - \lg \frac{kd}{D}$, 其中, L 为被测试眼睛的视力值, d 为该眼睛能分辨清楚的最低一行 “E” 形视标的笔划宽度 (单位: 毫米), D 为眼睛到视标的距离 (单位: 米), 如图 1 所示, k 是与 d, D 无关的常量.

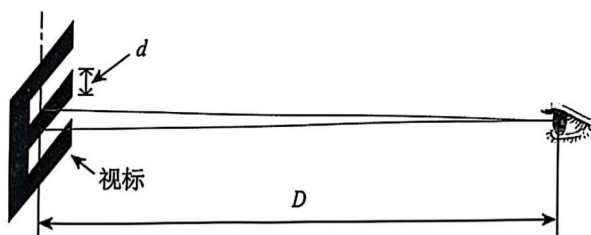


图 1

图 2 是标准视力表的一部分, 一个右眼视力值为 5.0 的人在距离该视力表 5 米处进行检测, 能分辨的最低一行视标为图 2 中虚线框部分. 因条件所限, 小明在距离该视力表 3 米处进行检测, 若此时他的右眼能分辨的最低一行视标也为图 2 中虚线框部分, 不考虑其它因素的影响, 则与小明右眼的实际视力值最接近的为 (参考数据: $\lg 2 \approx 0.30$, $\lg 3 \approx 0.48$)

W	E	W	M	E	4.7			
E	M	E	E	W	M	4.8		
W	E	E	M	E	M	W	4.9	
M	E	W	E	E	M	W	E	5.0
E	M	E	W	M	E	E	W	5.1
E	E	E	E	E	E	E	E	5.2

图 2 部分标准视力表示意图

- (A) 4.5 (B) 4.6 (C) 4.8 (D) 5.0

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 若 $(x+2i)i=y-i$ ($x, y \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位), 则 $x+y=$ _____.

(12) 抛物线 $x^2=-4y$ 的焦点坐标为_____.

(13) 在平面直角坐标系 xOy 中, 若点 $A(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 可得到点 B , 则 $|AB|=$ _____, 点 A, B 到直线 $l: x=2$ 的距离之和的最大值为_____.

(14) 已知函数 $f(x)=\frac{2^x}{2^x+4}$, 则 $f(x)$ 的值域为_____, 曲线 $y=f(x)$ 的对称中心为_____.

(15) 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, P, Q 为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ (包含边界) 内的两个动点, 且满足 $PQ=1, PQ \parallel AB$. 给出下面四个结论:

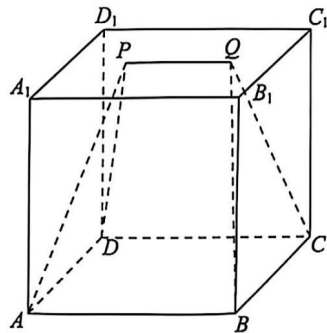
① 当 P 与 D_1 重合时, 五面体 $PQABCD$ 的体积为 $\frac{10}{3}$;

② 记直线 AA_1 分别与平面 PAD 和平面 QBC 所成角为 α, β , 则 $\tan \alpha + \tan \beta$ 的值不变;

③ 存在 P, Q , 使得 $DP \perp BQ$;

④ 存在 P, Q , 使得五面体 $PQABCD$ 中, $ABCD$ 所在平面与其余四个面所在平面的四个夹角中, 有三个彼此相等.

其中, 所有正确结论的序号为_____.



三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - 2\omega x) + 2\sin^2 \omega x - 1$ ($\omega > 0$) .

(I) 若 $\omega = \frac{1}{2}$, 求 $f(0)$ 及 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 已知 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增, 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使函数 $f(x)$ 存在且唯一确定, 求 $f(x)$ 的最小正周期 .

条件①: $f(0) + f(\frac{\pi}{6}) = 0$;

条件②: $x = \frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的一个极值点;

条件③: $x = \frac{7\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一个零点 .

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (II) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分 .

(17) (本小题 14 分)

如图 1, 五边形 $ABCEF$ 中, $AC \parallel EF$, $AC \perp CE$, $AB \perp BC$, $AC = 2BC = 2CE = 4$. 将三角形 ABC 沿 AC 翻折, 使得平面 $ABC \perp$ 平面 $ACEF$, 如图 2.

(I) 求证: $AB \perp$ 平面 BCE ;

(II) 记直线 AF 与平面 BEF 所成角为 θ . 若 $\sin \theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$, 求 EF 的长 .

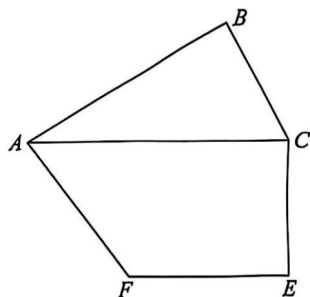


图 1

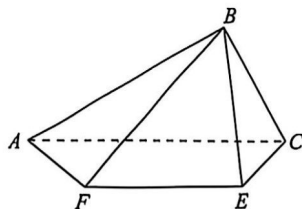


图 2

(18)(本小题 13 分)

某运动品牌拟推出一款青少年新品跑鞋. 在前期市场调研时, 从某市随机调查了 200 名中小学生对黑、白两种颜色的新品跑鞋的购买意愿, 统计数据如下 (单位: 人):

颜色	小学生		初中生		高中生	
	愿意	不愿意	愿意	不愿意	愿意	不愿意
黑色	80	20	40	20	20	20
白色	60	40	30	30	30	10

假设所有中小学生的购买意愿相互独立, 用频率估计概率.

- (I) 从该市全体中小学生中随机抽取 1 人, 估计其愿意购买黑色新品跑鞋的概率 p ;
- (II) 从该市的初中生、高中生两个不同群体中各自随机抽取 1 人, 记 X 为这 2 人中愿意购买白色新品跑鞋的人数, 求 X 的分布列和数学期望 EX ;
- (III) 假设该市 A 学校内的小学生、初中生和高中生的人数之比为 $2:2:1$, 从 A 学校的全体中小学生中随机抽取 1 人, 将其愿意购买黑色新品跑鞋的概率估计值记为 p_A , 试比较 p_A 与 (I) 中的 p 的大小. (结论不要求证明)

(19)(本小题 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$. 设直线 $l: y = x + m$ 交椭圆 C 于不同的两点 A, B , 与 y 轴交于点 P .

- (I) 当 $m = 0$ 时, 求 $|AB|$ 的值;
- (II) 若点 Q 满足 $|PQ| = 3$ 且 $|QA| = |QB|$, 求 $\angle AQB$ 的大小.

(20)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = e^{-x} \ln(x+1) - ax$.

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上的极值点个数;

(III) 若 $s, t \in (-1, +\infty)$ 且 $s+t \leq 0$ 时, 都有 $f(s)+f(t) \leq 0$ 成立, 直接写出 a 的取值范围.

(21)(本小题 15 分)

记 $|M|$ 表示有穷集合 M 的元素个数. 已知 m, n 是正整数, 集合 $S = \{1, 2, \dots, n\}$. 若集合序列 $Q: A_1, A_2, \dots, A_m$ 满足下列三个性质, 则称 Q 是“平衡序列”:

① $|A_k| \geq 2$, 其中 $k=1, 2, \dots, m$;

② $A_k \subsetneq S$, 其中 $k=1, 2, \dots, m$;

③ 对于 S 中的任意两个不同元素 i, j , 都存在唯一的 $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, 使得 $\{i, j\} \subseteq A_k$.

(I) 设 $m=n=5$, 判断下列两个集合序列是否是“平衡序列”? (结论不要求证明)

$Q_1: \{1, 2\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}$

$Q_2: \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}$

(II) 已知 $n \geq 3$ 且集合序列 $Q: A_1, A_2, \dots, A_m$ 是“平衡序列”, 对于 $i=1, 2, \dots, n$, 定义:

$$B_i = \{k | i \in A_k, k=1, 2, \dots, m\}.$$

证明:

(i) 当 $1 \notin A_1$ 时, $|B_1| \geq |A_1|$;

(ii) $m \geq n$.

海淀区 2024—2025 学年第二学期期末练习

2025.05

高三数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) A (2) B (3) D (4) A (5) D
(6) C (7) C (8) B (9) B (10) C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

- (11) -3 (12) (0, -1) (13) 2, $4+2\sqrt{3}$
(14) (0,1), $(2, \frac{1}{2})$ (15) ①②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16) (本小题 13 分)

解：(I) $f(x) = \cos \frac{\pi}{3} \cos 2\omega x + \sin \frac{\pi}{3} \sin 2\omega x - \cos 2\omega x$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - \frac{1}{2} \cos 2\omega x$$
$$= \sin(2\omega x - \frac{\pi}{6}) .$$

若 $\omega = \frac{1}{2}$ ，则 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ ，

所以， $f(0) = -\frac{1}{2}$ 。

因为 $y = \sin x$ 的单调增区间为 $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

所以 $x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

所以 $x \in [-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$ ， $k \in \mathbf{Z}$ 。

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$ ， $k \in \mathbf{Z}$ 。

(II) 选条件①。

因为 $\omega > 0$ ， $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，

$$\text{所以 } \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{4\omega} \geq \frac{\pi}{3}, \text{ 即 } \omega \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{因为 } f(x) = \sin(2\omega x - \frac{\pi}{6}), \quad f(0) + f(\frac{\pi}{6}) = 0,$$

$$\text{所以 } \sin(-\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = 0, \text{ 即 } \sin(\frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2},$$

又因为 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } \omega = 6k + 1, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{又 } 0 < \omega \leq \frac{3}{2},$$

所以, $\omega = 1$,

所以 $f(x)$ 最小正周期 $T = \pi$.

(II) 选条件②.

因为 $\omega > 0$, $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{4\omega} \geq \frac{\pi}{3}, \text{ 即 } \omega \leq \frac{3}{2}.$$

因为 $x = \frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的一个极值点, $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } f(\frac{\pi}{3}) = 1,$$

$$\text{所以 } \frac{2\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } \omega = 3k + 1, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{又 } 0 < \omega \leq \frac{3}{2},$$

所以 $\omega = 1$,

所以 $f(x)$ 最小正周期 $T = \pi$.

(17) (本小题 13 分)

解: (I) 因为平面 $ABC \perp$ 平面 $ACEF$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $ACEF = AC$, $CE \perp AC$,

所以 $CE \perp$ 平面 ABC ,

所以 $CE \perp AB$,

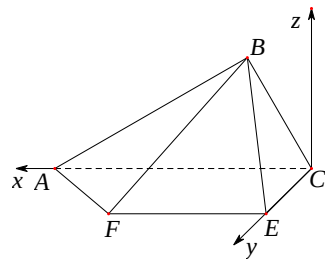
又因为 $AB \perp BC$, $BC \cap CE = C$,

所以 $AB \perp$ 平面 BCE .

(II) 过点 C 在平面 ABC 内作 AC 的垂线 CD ,

因为 $CE \perp$ 平面 ABC ,

所以 $CD \perp CE$, $CD \perp AC$,



所以 $CD \perp$ 平面 $ACEF$.

设 $EF = a$, $a > 0$,

则 $A(4, 0, 0), F(a, 2, 0), B(1, 0, \sqrt{3}), E(0, 2, 0)$,

所以 $\overrightarrow{AF} = (a-4, 2, 0), \overrightarrow{BE} = (-1, 2, -\sqrt{3}), \overrightarrow{EF} = (a, 0, 0)$,

设平面 BEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FE} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -x + 2y - \sqrt{3}z = 0, \\ ax = 0 \end{cases},$$

令 $y = \sqrt{3}$, 则 $z = 2$, 于是 $\mathbf{n} = (0, \sqrt{3}, 2)$,

$$\text{所以, } \sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AF}, \mathbf{n} \rangle \right| = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{(a-4)^2 + 4}} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

所以 $a = 4$, 即 $EF = 4$.

其它建系:

- (II) 过点 B 作 $BO \perp AC$, 过 O 作 $OD \perp AC$ 交 EF 于 D ,
因为 平面 $ABC \perp$ 平面 $ACEF$, $BO \perp AC$,
 $BO \subset$ 平面 ABC , 平面 $ABC \cap$ 平面 $ACEF = AC$,
所以 $BO \perp$ 平面 $ABCD$.

设 $EF = a$, $a > 0$,

则 $A(0, -3, 0), F(2, 1-a, 0), B(0, 0, \sqrt{3}), E(2, 0, 0)$, ...7 分

所以, $\overrightarrow{AF} = (2, 4-a, 0), \overrightarrow{BE} = (2, 0, -\sqrt{3}), \overrightarrow{EF} = (0, 1-a, 0)$,

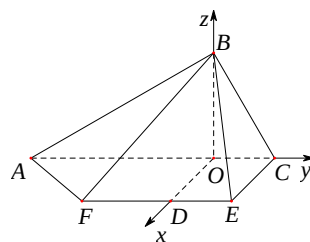
设平面 BEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FE} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2x - \sqrt{3}z = 0, \\ (1-a)y = 0, \end{cases}$$

令 $x = \sqrt{3}$, 则 $z = 2$, $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 0, 2)$,

$$\text{所以, } \sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AF}, \mathbf{n} \rangle \right| = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{4 + (4-a)^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

所以 $a = 4$, 即 $EF = 4$.



(18) (本小题 14 分)

解:

(I) 依据题目条件用频率估计概率 $p = \frac{80+40+20}{200} = 0.7$.

(II) 从该市初中生、高中生两个不同群体中各自随机抽取 1 人, 用频率估计概率

初中生愿意购买白色新品跑鞋的概率为 $\frac{1}{2}$,

高中生愿意购买白色新品跑鞋的概率为 $\frac{3}{4}$,

X 的取值范围为 $\{0, 1, 2\}$,

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8};$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

故 X 的分布列为:

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

$$\text{期望 } EX = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{8} = \frac{5}{4}.$$

(III) $p_A < p$.

(19) (本小题 15 分)

解: (I) 当 $m=0$ 时, l 为 $y=x$,

$$\text{代入椭圆方程得 } \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{2} = 1, \text{ 解得 } x^2 = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } |AB| = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y = x + m, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 得 } 4x^2 + 6mx + 3m^2 - 6 = 0.$$

$$\Delta = 36m^2 - 16(3m^2 - 6) = 96 - 12m^2 > 0,$$

解得 $m^2 < 8$, 即 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, AB 中点为 M ,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}m, x_1 x_2 = \frac{3m^2 - 6}{4},$$

$$\text{可得 } x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{3m}{4}, y_M = x_M + m = \frac{m}{4}, \text{ 即 } M(-\frac{3m}{4}, \frac{m}{4}).$$

由题意可得 $P(0, m)$,

$$\text{所以 } |MP| = \sqrt{\left(-\frac{3m}{4}\right)^2 + \left(\frac{m}{4} - m\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}|m|,$$

$$\text{可得 } |MQ| = \sqrt{|PQ|^2 - |MP|^2} = \sqrt{9 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}|m|\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{8}m^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{8 - m^2},$$

$$\text{又因为 } |MB| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2|,$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2},$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{9m^2}{4} - (3m^2 - 6)} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sqrt{8 - m^2},$$

因为 $|QA| = |QB|$,

所以 $QM \perp AB$.

$$\text{在 } Rt\triangle QMB \text{ 中, } |MQ| = \sqrt{3}|MB|,$$

$$\text{所以 } \angle AQB = \frac{\pi}{3}.$$

(20) (本小题 15 分)

解: (I) $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

$$\text{因为 } f(x) = e^{-x} \ln(x+1) - ax,$$

$$\text{所以 } f(0) = 0, \quad f'(x) = [-\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}]e^{-x} - a,$$

$$\text{所以 } f'(0) = 1 - a,$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = (1-a)x$.

(II) 由题设 $g(x) = f'(x)$

$$\text{所以 } g'(x) = [\ln(1+x) - \frac{2}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}]e^{-x},$$

$$\text{因为 } x \in (-1, 0), \text{ 所以 } \ln(1+x) < 0, -\frac{2}{1+x} < 0, -\frac{1}{(1+x)^2} < 0,$$

所以 $g'(x) < 0$ 在 $(-1, 0)$ 上恒成立,

所以 $g(x) = f'(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减, $g(0) = f'(0) = 1-a$.

①当 $a \leq 1$ 时, $f'(x) > f'(0) = 1-a \geq 0$ 对于任意的 $x \in (-1, 0)$ 恒成立,

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上无极值点.

②当 $a > 1$ 时, $f'(0) = 1-a < 0$, $f'(\frac{1}{a}-1) = (\ln a + a)e^{\frac{1}{a}-1} - a > ae^{\frac{1}{a}-1} - a > a-a=0$, ...9 分

所以存在唯一的 $x_0 \in (\frac{1}{a}-1, 0)$, 使得 $f'(x) = 0$, 其中 $-1 < \frac{1}{a}-1 < 0$,

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-1, x_0)$	x_0	$(x_0, 0)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上有一个极大值点, 无极小值点.

综上, 当 $a \leq 1$ 时 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上的极值点个数为 0.

当 $a > 1$ 时 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上的极值点个数为 1.

(III) a 取值范围为 $(-\infty, 1]$.

(21) (本小题 15 分)

解: (I) Q_1 是平衡的, Q_2 不是平衡的.

(II) (i) 当 $1 \notin A_1$ 时, 对于 A_1 中的每个元素 j , 考虑 $\{1, j\}$.

由③知存在唯一的 $k_j \neq 1$, 满足 $\{1, j\} \subseteq A_{k_j}$, 则 $k_j \in B_1$.

将每一个 $j \in A_1$ 对应到 $k_j \in B_1$,

若 $j \neq j'$, 就有 $k_j \neq k_{j'}$, 否则 $\{j, j'\} \subseteq A_1$ 且 $\{j, j'\} \subseteq A_{k_j}$ 与③矛盾.

所以 $|A_1| \leq |B_1|$.

(ii) 对 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 中所有元素的总个数算两次 (重复出现的计多次),

一方面总个数就是 $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_m|$,

另一方面，按照每个元素出现的次数计算，这个总个数也是 $|B_1|+|B_2|+\cdots+|B_n|$ ，

所以 $|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_m|=|B_1|+|B_2|+\cdots+|B_n|$. (*)

不妨设 $|B_1|, |B_2|, \dots, |B_n|$ 中最小的（之一）为 $|B_n|$ ，

且 $B_n = \{1, 2, \dots, t\}$ ，由②③知 $1 < t < n$ 。

再不妨设 $s \in A_s$ ($s = 1, 2, \dots, t$)。

由(i)的证明方法可证：当 $i \notin A_k$ 时， $|B_i| \geq |A_k|$ ，

由③知 $s \notin A_{s+1}$ ($s = 1, 2, \dots, t-1$)， $t \notin A_1$ ，

所以 $|A_{s+1}| \leq |B_s|$ ($s = 1, 2, \dots, t-1$)， $|A_1| \leq |B_t|$ ，

又因为 $n \notin A_{t+1}, A_{t+2}, \dots, A_m$ ，所以 $|A_{t+1}|, |A_{t+2}|, \dots, |A_m|$ 都不大于 $|B_n|$ ，

全部相加得 $|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_m| \leq |B_1|+|B_2|+\cdots+|B_t|+(m-t)|B_n|$ ，

由 $|B_n|$ 的最小性知 $|B_1|+|B_2|+\cdots+|B_n| \geq |B_1|+|B_2|+\cdots+|B_t|+(n-t)|B_n|$ ，

结合(*)可得

$|B_1|+|B_2|+\cdots+|B_t|+(m-t)|B_n| \geq |B_1|+|B_2|+\cdots+|B_t|+(n-t)|B_n|$ ，

所以 $m \geq n$ 。