诸暨市 2025 年 5 月高三适应性考试
数学参考答案

一、单项选择题（每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	B	C	A	C	D

二、多项选择题（每小题 6 分，共 18 分；部分选对的得部分分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11
答案	BD	ABC	ACD

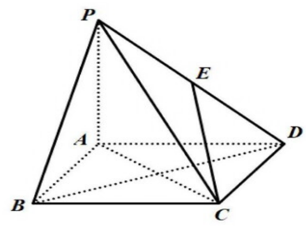
三、填空题（每小题 5 分；共 15 分）

12． $\log_2 3$　　　**13．** $\frac{5}{9}$　　　**14．** $\omega > \frac{\sqrt{3}}{3}$

四、解答题（共 77 分；13 分+15 分+15 分+17 分+17 分）

15.（6 分+7 分）

（1）证明：连接 AC， BD，



$\because ABCD$ 是菱形， AC,BD 是对角线，

$\therefore AC\perp BD$，　　　………2 分

又$\because PA\perp$平面 $ABCD$， $BD\subseteq$平面 $ABCD$，

$\therefore PA\perp BD$，　　　………4 分

又$\because AC\cap PA=A$， $AC\subseteq$平面 PAC， $PA\subseteq$平面 PAC，

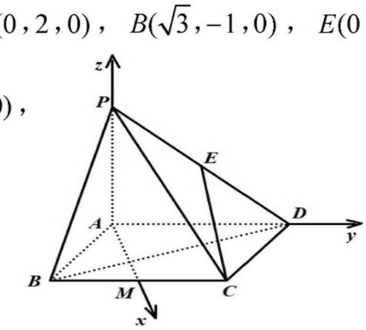
$\therefore BD\perp$平面 PAC，　　　………5 分

又$\because PC\subseteq$平面 PAC， $\therefore BD\perp PC$．　　　………6 分

（2）取 BC 中点 M，连接 AM，以 AM 为 x 轴，以 AD 为 y 轴，以 AP 为 z 轴，建立如图空间直角坐标系，　　　………7 分

令 $AB=2$，则 $A(0,0,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$， $P(0,0,2)$， $D(0,2,0)$， $B(\sqrt{3},-1,0)$， $E(0,1,1)$，

$\therefore \overrightarrow{CE}=(-\sqrt{3},0,1)$， $\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$， $\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{3},3,0)$，　　　………9 分



设平面 PBD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}2y-2z=0\\ -\sqrt{3}x+3y=0\end{cases}$，得$\vec{n}=(\sqrt{3},1,1)$， ………11 分

$\therefore \sin\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CE}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|(-\sqrt{3},0,1)\cdot(\sqrt{3},1,1)\right|}{2\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………13 分

16.（7 分+4 分+4 分）解：

（1）由题意知：X 的可能取值为$0,1,2$， ………2 分

$\because P(X=0)=\dfrac{C_2^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{45}$，$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_8^1}{C_{10}^2}=\dfrac{16}{45}$，$P(X=2)=\dfrac{C_8^2}{C_{10}^2}=\dfrac{28}{45}$， ………5 分

$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{45}$	$\dfrac{16}{45}$	$\dfrac{28}{45}$

$\therefore\ E(X)=0\times\dfrac{1}{45}+1\times\dfrac{16}{45}+2\times\dfrac{28}{45}=\dfrac{8}{5}$ ………7 分

（2）由题意知： 20 名学生成绩变化的中位数为1，$\therefore\ m=1$ ………9 分

列联表如下：

	低于 m	不低于 m	总计
使用组	2	8	10
非使用组	6	4	10
总计	8	12	20

………11 分

（3）$\because \chi^2=\dfrac{20(2\times4-6\times8)^2}{8\times12\times10\times10}=\dfrac{10}{3}>2.706$， ………13 分

$\therefore$有 90% 的把握认为使用 DeepSeek 与数学成绩变化有显著关联. ………15 分

17.（6 分+9 分）解：

（1）当$t=1$且$PQ\perp x$ 轴时，$A(1,1)$，$T(3,0)$，$H(m,1)$

设$l_{PQ}:x=m(m>0)$，$P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，

联立$\begin{cases}x=m\\ y^2=4x\end{cases}$，得$y_1=2\sqrt{m},y_2=-2\sqrt{m}$，$\therefore P(m,2\sqrt{m})$，$Q(m,-2\sqrt{m})$ ………2 分

$\therefore \overrightarrow{AP}=(m-1,2\sqrt{m}-1),\overrightarrow{AQ}=(m-1,-2\sqrt{m}-1)$,

由$AP\perp AQ$，得$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$，即$(m-1)^2+(2\sqrt{m}-1)(-2\sqrt{m}-1)=0$，化简得$m^2-6m=-2$； …4分

又$\because \left|TH\right|=\sqrt{(m-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{m^2-6m+10}=2\sqrt{2}$，即$\left|TH\right|=2\sqrt{2}$. ………6 分

(2)法一：

设$l_{PQ}:x=my+c$，$l_{AH}:x-1=-\dfrac{1}{m}y$，$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

当$t=0$时，$A(1,1),T(3,0)$，则$\overrightarrow{AP}=(x_1-1,y_1),\overrightarrow{AQ}=(x_2-1,y_2)$，

联立$\begin{cases}x=my+c\\ y^2=4x\end{cases}$，得$y^2-4my-4c=0$，由韦达定理得$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4c$， ………8 分

$\because AP\perp AQ$，

$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$，即$(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0$，化简得$\dfrac{y_1^2y_2^2}{16}-[m(y_1+y_2)+2c]+1+y_1y_2=0$，

代入可得$c^2-6c+1=4m^2$； ………10 分

联立$\begin{cases}x=my+c\\ x-1=-\dfrac{1}{m}y\end{cases}$，可得$H\left(\dfrac{m^2+c}{m^2+1},\dfrac{m-mc}{m^2+1}\right)$， ………11 分

$$\because |TH|^2=\left(\frac{m^2+c}{m^2+1}-3\right)^2+\left(\frac{m-mc}{m^2+1}\right)^2=\frac{(-2m^2+c-3)^2+(m-mc)^2}{(m^2+1)^2}=\frac{4m^4+(c^2-6c+13)m^2+c^2-6c+9}{(m^2+1)^2}$$

$$=\frac{(m^2+1)(4m^2+c^2-6c+9)}{(m^2+1)^2}=\frac{4m^2+c^2-6c+9}{m^2+1}=\frac{8m^2+8}{m^2+1}=8$$

$\therefore |TH|=2\sqrt{2}$， ………14 分

$\therefore$ H的轨迹方程为$(x-3)^2+y^2=8$． ………15 分

法二：

设直线$PD:A(x-1)+By=1$，联立抛物线$y^2=4(x-1)+4$；

配齐次得$y^2=4(x-1)[A(x-1)+By]+4[A(x-1)+By]^2$． ………8分

得$k_1k_2=\dfrac{4A^2+4A}{4B^2-1}=-1$，即$4A^2+4A+4B^2=1$． ………10 分

联立直线$AH:B(x-1)-Ay=0$与直线$PD:A(x-1)+By=1$，

解得$H\left(\dfrac{A}{A^2+B^2}+1,\dfrac{B}{A^2+B^2}\right)$，有$x_H=\dfrac{A}{A^2+B^2}+1$，$y_H=\dfrac{B}{A^2+B^2}$，即$B=\dfrac{y}{4x}$，$A=\dfrac{x-1}{4x}$，…13 分

代入至$4A^2+4A+4B^2=1$，解得H的轨迹方程为：$x^2-6x+1+y^2=0$． ………15 分

18.（4 分+4 分+9 分）解：

（1）由题意知：$x\in(0,2)$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}+a=\dfrac{2}{x(2-x)}+a$有两个变号零点； ………2 分

令$g(x)=\dfrac{2}{x(2-x)}$，在$(0,1)$上递减，$(1,2)$上递增；

又$\dfrac{1}{4}\le x_1<x_2$，得$2<-a\le\dfrac{32}{7}$，即$-\dfrac{32}{7}\le a<-2$； ………4 分

（2）$\because x\in(0,2)$，则对称性有关的横坐标：$x=1$，且 $f(1)=a$， ………5 分

又 $\because f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax$，$\because f(2-x)=\ln\dfrac{2-x}{x}+a(2-x)\neq f(x)$，

有 $f(x)+f(2-x)=\ln\dfrac{x}{2-x}\cdot\dfrac{2-x}{x}+2a=2a$， ………7 分

故 $f(x)$ 有对称中心 $(1,a)$，无对称轴； ………8 分

（3）法一：

有 $x_1+x_2=2$，$a=-\dfrac{2}{x_1(2-x_1)},\dfrac{1}{4}\le x_1<1$，

故有 $f(x_1)+kx_2=\ln\dfrac{x_1}{2-x_1}+ax_1+kx_2=\ln\dfrac{x_1}{2-x_1}-\dfrac{2}{2-x_1}+k(2-x_1)$，$x_1\in[\dfrac{1}{4},1)$；

当 $x\to1$ 时，$h(x)=k-2\ge0$，故 $k\ge2$. ………11 分

下证充分性：

有 $f(x_1)+kx_2\ge\ln\dfrac{x_1}{2-x_1}-\dfrac{2}{2-x_1}+2(2-x_1)$，$x_1\in[\dfrac{1}{4},1)$.

令 $h(x)=\ln x-\ln(2-x)-\dfrac{2}{2-x}+2(2-x),x\in[\dfrac{1}{4},1)$，

则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{2}{(2-x)^2}-2=\dfrac{2(-x^3-4x^2-6x+2)}{2(2-x)^2}$， ………13 分

令 $\varphi(x)=-x^3-4x^2-6x+2$，有 $\varphi'(x)=-3x^2-8x-6<0$，

故 $\varphi'(x)$ 在 $(\dfrac{1}{4},1)$ 上递减，又 $\varphi(1)<0$，$\varphi(\dfrac{1}{4})>0$，

故存在 $x_0\in(\dfrac{1}{4},1)$，使得 $\varphi(x_0)=0$，故 $h(x)$ 在 $(\dfrac{1}{4},x_0)$ 上递增，在 $(x_0,1)$ 上递减.

又 $h(1)=0$，$h(\dfrac{1}{4})=-\ln7+\dfrac{37}{14}>0$，故 $h(x)>0$ 恒成立， ………15 分

若 $k<2$，有 $f(x_1)+kx_2<\ln\dfrac{x_1}{2-x_1}-\dfrac{2}{2-x_1}+2(2-x_1),x_1\in[\dfrac{1}{4},1)$，

由 $h(x)>h(1)=0$，故存在 $x_1<1$，使得 $f(x_1)+kx_2<0$，故 $k<2$ 不合题意. ………16 分

综上，若 $f(x_1)+kx_2>0$ 恒成立，则实数 $k\ge2$. ………17 分

法二：

有 $x_1+x_2=2$，$a=-\dfrac{2}{x_1(2-x_1)},\dfrac{1}{4}\le x_1<1$，

故有 $f(x_1)+kx_2=\ln\dfrac{x_1}{2-x_1}+ax_1+kx_2=\ln\dfrac{x_1}{2-x_1}-\dfrac{2}{2-x_1}+k(2-x_1),x_1\in[\dfrac{1}{4},1)$，

参变分离得 $k>\dfrac{\dfrac{2}{2-x}-\ln\dfrac{x}{2-x}}{2-x}$， ………11 分

令 $g(x)=\dfrac{\dfrac{2}{2-x}-\ln\dfrac{x}{2-x}}{2-x}$，有 $g'(x)=\dfrac{2x\ln\dfrac{x}{2-x}-x^2\ln\dfrac{x}{2-x}-6x+4}{x^4-6x^3+12x^2-8x}$， ·········12 分

其中 $x^4-6x^3+12x^2-8x=x(x^3-6x^2+12x-8)$，令 $h(x)=x^3-6x^2+12x-8$，

有 $h'(x)=3x^2-12x+12>0$ 在 $x\in(\frac{1}{4},1)$ 上成立，故 $h(x)$ 在 $(\frac{1}{4},1)$ 上递增，

又 $h(1)<0$，故 $h(x)<0$，$x^4-6x^3+12x^2-8x<0$， ·········13 分

令 $\varphi(x)=2x\ln\dfrac{x}{2-x}-x^2\ln\dfrac{x}{2-x}-6x+4$，

有 $\varphi'(x)=2\ln\dfrac{x}{2-x}-2x\ln\dfrac{x}{2-x}-4=2(1-x)\ln\dfrac{x}{2-x}-4$，

在 $x\in(\frac{1}{4},1)$ 上，$2-x>0$ 且单调递减，$\ln\dfrac{x}{2-x}<0$ 且单调递增，

故 $\varphi'(x)$ 在 $(\frac{1}{4},1)$ 上单调递增，又 $\varphi'(1)=-4<0$，故 $\varphi'(x)<0$，

故 $\varphi(x)$ 在 $(\frac{1}{4},1)$ 上单调递减，又 $\varphi(1)=2\ln2-2<0$，$\varphi(\frac{1}{4})>0$，

故存在 $x_0\in(\frac{1}{4},1)$ 使得 $\varphi(x_0)=0$． ·········15 分

故 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{4},x_0)$ 上递减，在 $(x_0,1)$ 上递增， ·········16 分

又 $g(1)=2$，$g(\frac{1}{4})<2$，故 $k\geq 2$． ·········17 分

19．（4 分+4 分+9 分）解：

（1）设 $DC=x$，$PC=a$，有 $DP=x-a$，$AP=a$，$AD=12-x$，

在 $Rt\Delta ADP$ 中，$(12-x)^2+(x-a)^2=a^2$，解得 $a=\dfrac{x^2-12x+72}{x}$， ·········1 分

故 $S_{\Delta ADP}=\dfrac{1}{2}(12-x)(x-a)=6(-x-\dfrac{72}{x}+18)\leq 108-72\sqrt{2}$（当且仅当 $x=6\sqrt{2}$ 时取等号）， ·········3 分

此时 $\tan\theta=\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{12-6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$； ·········4 分

(2) 此时矩形 $ABCD$ 为正方形，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$． ·········5 分

折叠一次可得 AC 即 $\angle PAB$ 的角平分线，故 $\angle ACD=\dfrac{1}{2}\angle APD$，故 $\angle ATD=\dfrac{1}{2^{2025}}\angle ACD=\dfrac{\pi}{2027}$，···7 分

故 $DT=\dfrac{AD}{\tan\angle ATD}=\dfrac{6}{\tan\dfrac{\pi}{2^{2027}}}$． ·········8 分

（3）由题意得 $\angle AS_nD=\beta_n=\dfrac{\theta}{2^n}$， $\angle AT_nD=\alpha_n$，则 $\alpha_{n+1}=\begin{cases}2\alpha_n, & \text{当}\alpha_n<\dfrac{\pi}{4}\text{时}\\ \pi-2\alpha_n, & \text{当}\alpha_n<\dfrac{\pi}{4}\text{时}\end{cases}$ ，其中 $\alpha_0=\theta$.

要使 $DS_n\le DT_n$，即 $\angle AS_nD\le\angle AT_nD$， $\alpha_n\le\beta_n=\dfrac{\theta}{2^n}$.　　　　………10 分

① 当 $n=1$ 时， $\beta_1=\dfrac{\theta}{2}$.

若 $\theta<\dfrac{\pi}{4}$，则 $\alpha_1=2\theta\le\dfrac{\theta}{2}$，无解； 若 $\theta>\dfrac{\pi}{4}$，则 $\alpha_1=\pi-2\theta\le\dfrac{\theta}{2}$，解得 $\dfrac{2\pi}{5}\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

符合约束条件的 θ 的区间长度 $|\Omega|=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\pi}{10}$.　　　　………12 分

② 当 $n=2$ 时， $\beta_2=\dfrac{\theta}{4}$.

若 $\theta<\dfrac{\pi}{8}$，则 $\alpha_2=4\theta\le\dfrac{\theta}{4}$，无解；

若 $\dfrac{\pi}{8}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，则 $\alpha_1=2\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$， $\alpha_2=\pi-2\alpha_1=\pi-4\theta\le\dfrac{\theta}{4}$，解得 $\dfrac{4\pi}{17}\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\dfrac{4\pi}{17}\le\theta<\dfrac{\pi}{4}$；

若 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{3\pi}{8}$，则 $\alpha_1=\pi-2\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$， $\alpha_2=\pi-2\alpha_1=4\theta-\pi\le\dfrac{\theta}{4}$，解得 $0<\theta\le\dfrac{4\pi}{15}$，故 $\dfrac{\pi}{4}<\theta\le\dfrac{4\pi}{15}$；

若 $\dfrac{3\pi}{8}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\alpha_1=\pi-2\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$， $\alpha_2=2\alpha_1=2\pi-4\theta\le\dfrac{\theta}{4}$，解得 $\dfrac{8\pi}{17}\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\dfrac{8\pi}{17}\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

由于 $[\dfrac{8\pi}{17},\dfrac{\pi}{2})$ 被 $n=1$ 时的 $[\dfrac{2\pi}{5},\dfrac{\pi}{2})$ 覆盖，

故符合约束条件的 θ 的区间长度 $|\Omega|=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{4\pi}{15}-\dfrac{4\pi}{17}=\dfrac{67\pi}{510}>\dfrac{\pi}{8}$；　　　　………14 分

③ 当 $n\ge3$ 时，符合约束条件的 θ 的区间长度

$$\frac{|\Omega|}{\pi}=(\frac{1}{2}-\frac{2}{5})+(\frac{4}{15}-\frac{4}{17})+(\frac{8}{63}-\frac{8}{65})\times4+(\frac{16}{255}-\frac{16}{257})\times4\times(1+3)+\cdots+(\frac{2^n}{2^{2n}-1}-\frac{2^n}{2^{2n}+1})\times4\times(1+3+\cdots+(2n-5))$$

即 $\dfrac{|\Omega|}{\pi}=(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{5})+(\dfrac{4}{15}-\dfrac{4}{17})+4\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\left[(k-2)^2\left(\frac{2^k}{2^{2k}-1}-\frac{2^k}{2^{2k}+1}\right)\right]$，

由 $(k-2)^2\left(\dfrac{2^k}{2^{2k}-1}-\dfrac{2^k}{2^{2k}+1}\right)=(k-2)^2\dfrac{2^{k+1}}{2^{4k}-1}<(k-2)^2\dfrac{2^{k+1}}{2^{4k}}=(k-2)^2 2^{1-3k}$，

故 $4\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\left[(k-2)^2\left(\frac{2^k}{2^{2k}-1}-\frac{2^k}{2^{2k}+1}\right)\right]<4\sum_{k=1}^{n-2}k^2 2^{-3k-5}=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k^2}{8^k}$，

裂项得 $\dfrac{k^2}{8^k}=\dfrac{-\frac{1}{7}k^2-\frac{16}{49}k-\frac{72}{343}}{8^k}-\dfrac{-\frac{1}{7}(k-1)^2-\frac{16}{49}(k-1)-\frac{72}{343}}{8^{k-1}}$，

故 $4\sum_{k=3}^{n}\left[(k-2)^2\left(\frac{2^k}{2^{2k}-1}-\frac{2^k}{2^{2k}+1}\right)\right]<\frac{1}{8}\cdot\frac{72}{343}=\frac{72}{2744}$， ·········16 分

综上 $|\Omega|<\frac{67\pi}{510}+\frac{72\pi}{2744}<\frac{\pi}{4}$. ·········17 分