

诸暨市 2025 年 5 月高三适应性考试

数 学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{i^2, i^4\}$ (i 为虚数单位), $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$ (▲)
A. $\{-1\}$ B. $\{1\}$ C. $\{-1, 0\}$ D. $\{-1, 1\}$
2. $(x-2y)^7$ 的展开式中第三项的系数是 (▲)
A. C_7^2 B. $-2C_7^2$ C. $4C_7^2$ D. $-4C_7^2$
3. 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 和双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的离心率分别为 e_1, e_2 .
若 $e_1 \cdot e_2 = 1$, 则 $a =$ (▲)
A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. 已知 $\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$, $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}$, 则 $\sin 2\alpha \sin 2\beta =$ (▲)
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1
5. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是 d , S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 “ $d=0$ ” 是 “ $S_3 = 3a_3$ ” 的 (▲)
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 若圆柱内有一个内切球, 这个球的直径恰好与圆柱的高相等, 记圆柱与球的体积之比为 λ , 表面积之比为 μ , 则 (▲)
A. $\lambda = \mu$ B. $\lambda < \mu$
C. $\lambda > \mu$ D. λ, μ 的大小不确定
7. 已知函数 $f(x) = x^2 + a|x| + a^2 - 4$ 有唯一零点, 则 $a =$ (▲)
A. 0 B. -2 C. 2 D. ± 2
8. 已知点 P 在圆 $x^2 + y^2 = \pi^2$ 上运动, 若过点 P 可以作曲线 $y = \sin x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 的切线, 则点 P 的轨迹长度是 (▲)
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi^2}{2}$ C. $\frac{3\pi}{2}$ D. $\frac{3\pi^2}{2}$

二、多项选择题：本大题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边的长分别为 a, b, c ，则下列结论中正确的是（▲）

- A. $c = a \cdot \sin B + b \cdot \sin A$ B. $c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A$
C. 若 $a > b$ ，则 $\sin 2A > \sin 2B$ D. 若 $a > b$ ，则 $\cos 2A < \cos 2B$

10. 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为2，侧棱长是3， AB, BC 的中点为 M, N ，过点 D_1, M, N 的平面记为 α ，则下列说法中正确的是（▲）

- A. 点 A_1 和点 C_1 到平面 α 的距离相等 B. 二面角 D_1-MN-D 的正切值为 $\sqrt{2}$
C. 平面 α 截得的截面形状是五边形 D. 平面 α 截得的截面面积为 $7\sqrt{3}$

11. 已知集合 $I \subseteq \{\vec{a} \mid \vec{a} = (x, y), x, y \in \mathbb{R}\}$ ，若对于任意 $\vec{m}, \vec{n} \in I$ ，以及任意 $\lambda \in [0, 1]$ ，满足 $\lambda \vec{m} + (1-\lambda) \vec{n} \in I$ ，则称集合 I 为“一字集”，记 $\Omega = \{X \mid X \text{ 为“一字集”}\}$ ，则下列说法正确的是（▲）

- A. $\{\vec{a} \mid \vec{a} = (x, y), x^2 + y^2 \leq 1\} \in \Omega$
B. $\{\vec{a} \mid \vec{a} = (x, y), y \geq x e^x\} \in \Omega$
C. 若 $A \in \Omega, B \in \Omega$ ，且 $A \cap B \neq \emptyset$ ，则 $A \cap B \in \Omega$
D. 若 $A \in \Omega$ ，则 $\{\vec{b} \mid \vec{b} = 2\vec{a} + (3, 4), \vec{a} \in A\} \in \Omega$

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 若 $a, a + \log_2 3, a + \log_2 27$ 成等比数列，则实数 $a =$ ▲.

13. 从编号1, 2, 3的三张卡片中随机抽取一张，放回后再随机抽取一张，则第二次抽得的卡片上的数字能被第一次抽得的卡片上数字整除的概率为 ▲.

14. 已知函数 $f(x) = \sin \omega \pi x (\omega > 0)$ ，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{3\omega}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，点 A, B, C 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的连续相邻的三个交点，若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，则 ω 的取值范围为 ▲.

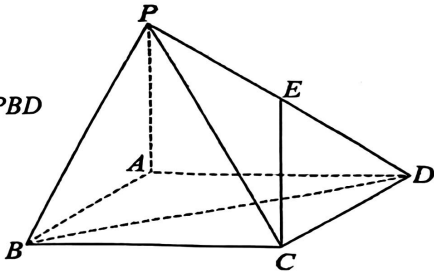
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本题 13 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$PA \perp$ 平面 $ABCD$ 。

(1) 证明： $BD \perp PC$ ；

(2) 若 E 为 PD 的中点， $PA = AB$ ，求直线 CE 与平面 PBD 所成角的正弦值。



16. (本题 15 分) 为了研究 DeepSeek (AI 学习助手) 对学生数学成绩的影响，将 20 名学生均分为两组，分别为使用组 (使用 DeepSeek) 和非使用组。一段时间后，测得 20 名学生的数学成绩变化如下 (单位：分)：

使用组	-2	-1	1	1	2	2	3	3	3	4
非使用组	-3	-3	-2	-1	0	0	1	1	2	3

- (1) 从使用组中随机抽取两名学生，设其中成绩进步的人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望；
- (2) 求 20 名学生数学成绩变化的中位数 m ，并分别统计两组中低于 m 与不低于 m 的人数，完成如下列联表：

	低于 m	不低于 m	总计
使用组			
非使用组			
总计			

- (3) 根据 (2) 中的列联表，能否有 90% 的把握认为使用 DeepSeek 与数学成绩变化有显著关联？

附： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$ 。

α	0.1	0.05	0.01	0.001
χ^2	2.706	3.841	6.635	10.828

17. (本题 15 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 点 $T(3,0)$, $A(1,t)$, 直线 l 交抛物线 C 于 P, Q 两点, 满足 $AP \perp AQ$, 点 A 在直线 PQ 上的投影点记为点 H .

(1) 当 $t=1$, $PQ \perp x$ 轴时, 求 $|TH|$ 的值;

(2) 当 $t=0$ 时, 求点 H 的轨迹方程.

18. (本题 17 分) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 满足 $\frac{1}{4} \leq x_1 < x_2$.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 判断并证明函数 $f(x)$ 的对称性;

(3) 若 $f(x_1) + kx_2 > 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

19. (本题 17 分) 设矩形 $ABCD$ 的周长为 24cm , 记 $\angle ACD = \theta$, 把 $\triangle ABC$ 沿过 A 的对角线 AC 向点 D 方向折叠, 直线 AB 折过去后交直线 DC 于点 P , 并得到矩形 $AP'D$, 记这个过程为一次折叠操作. 当两个矩形都在 AD 的同侧时, 称为同侧操作 (如图 1); 否则称为异侧操作 (如图 2). 若多次折叠, 则每次都为新得到的矩形沿着过 A 的对角线向点 D 折叠.

(1) 若点 P 在线段 DC 上, 求 $\triangle ADP$ 的最大面积及此时 $\tan \theta$ 的值;

(2) 当 $AB = 6\text{cm}$ 时, 若矩形 $ABCD$ 是由矩形 $AT'TD$ 同侧折叠 2025 次所得, 求 DT 的长度;

(3) 将矩形 $AT_n'T_nD$ 同侧折叠 n 次得到矩形 $ABCD$, 再将矩形 $ABCD$ 折叠 n 次得到 $AS_n'S_nD$.

若存在 $n \in \mathbb{N}^*$, 使得 $DS_n \leq DT_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 成立. 记满足条件的 θ 的取值集合为 Ω .

定义集合 Ω 的“长度”记为 $|\Omega|$, 例:

$$|\{x | 1 \leq x \leq 2\}| = 2 - 1 = 1, |\{x | 1 \leq x < 2 \text{ 或 } 2 < x \leq 3\}| = 2 - 1 + 3 - 2 = 2, |\{x | x = 1\}| = 0.$$

证明: $\frac{\pi}{8} < |\Omega| < \frac{\pi}{4}$.

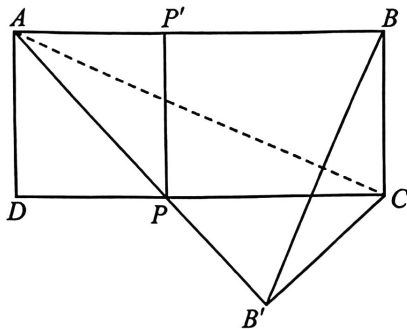


图 1

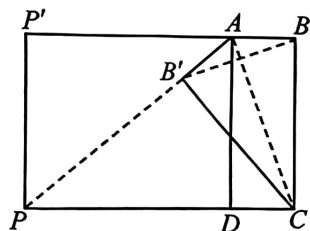


图 2