

台州市 2025 届高三第一次教学质量评估

数 学

本试题卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

选择题部分（共 58 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $\tan \alpha = 2$ ，则 $\cos 2\alpha$ 的值为

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

2. 椭圆 $E_1: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 与椭圆 $E_2: \frac{x^2}{9-k} + \frac{y^2}{4-k} = 1 (0 < k < 4)$ 的

- A. 长轴长相等 B. 短轴长相等 C. 离心率相等 D. 焦距相等

3. 若复数 z 是方程 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 的一个虚根，则 $z + \bar{z} =$

- A. -2 B. 2 C. $-4i$ D. $4i$

4. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 2x < 3\}$ ， $B = \{x | 2^x + x < 3\}$ ，则“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知变量 x 与 y 的成对样本数据具有线性相关关系，由一元线性回归模型 $\begin{cases} Y = bx + a + e, \\ E(e) = 0, D(e) = \sigma^2, \end{cases}$

根据最小二乘法，计算得经验回归方程为 $\hat{y} = 1.6x + \hat{a}$ ，若 $\bar{x} = 10$ ， $\bar{y} = 15$ ，则 $\hat{a} =$

- A. 6.6 B. 5 C. -1 D. -14

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = \log_3 x$ ，则 $f(-9) =$

- A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

7. 已知球 O 的半径为 3， P 是球 O 表面上的定点， S 是球 O 表面上的动点，且满足 $(2\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{SP}) \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ ，则线段 OS 轨迹的面积为

- A. $3\sqrt{2}\pi$ B. $3\sqrt{5}\pi$ C. $6\sqrt{2}\pi$ D. $6\sqrt{5}\pi$

8. 台州某校为阳光体育设计了一种课间活动，四位同学（两男两女）随机地站到 4×4 的方格场地中（每人站一格，每格至多一人），则两个男生既不同行也不同列，同时两个女生也既不同行也不同列的概率是

- A. $\frac{24}{65}$ B. $\frac{12}{35}$ C. $\frac{21}{65}$ D. $\frac{33}{91}$

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 下列选项正确的是

- A. 若随机变量 $X \sim B(6, \frac{1}{3})$ ，则 $D(X) = \frac{4}{3}$
- B. 若随机变量 $X \sim N(6, 4)$ ，则 $E(X) = 6$
- C. 若随机变量 X 服从 0-1 分布，且 $P(X=1) = \frac{1}{3}$ ，则 $D(X) = \frac{1}{3}$
- D. 若随机变量 X 满足 $P(X=k) = \frac{C_2^k \cdot C_4^{2-k}}{C_6^2}$ ， $k=0,1,2$ ，则 $E(X) = \frac{2}{3}$

10. 已知函数 $f(x) = |a - 2\sin x| - |\sin x|$ ， $a \in \mathbb{R}$ ，且 $a \neq 0$ ，则下列选项正确的是

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
- B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
- C. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ， $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4$
- D. $\exists a \in (1, 3)$ ， $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有两个不同的零点

11. 已知棱长为 3 的正四面体 $A-BCD$ ， $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{BF} = \mu \overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EF}$ ， $\lambda, \mu \in [0, 1]$ ，则下列选项正确的是

- A. 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时， $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
- B. 当 $\mu < \frac{1}{2}$ 时， $|\overrightarrow{EF}| < \frac{3\sqrt{2}}{2}$
- C. 当 $|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{5}$ 时， $\lambda + \mu$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$
- D. 当 $|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{5}$ 时，则 $|\overrightarrow{AM}|^2$ 的最大值为 $\frac{14+3\sqrt{2}}{4}$

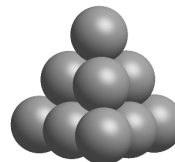
非选择题部分（共 92 分）

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中，后人称为“三角垛”。“三角垛”的最上层有 1 个球，第二层有 3 个球，第三层有 6 个球， $\dots$ ，设从上到下各层球的个数构成一个数列 $\{a_n\}$ ，

则 $a_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 若 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + ax$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，则实数 a 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



(第 12 题)

14. 已知圆 $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$ ，其中 $D < 0$ ，若圆 C 上仅有一个点到直线 $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$ 的距离为 1，则 $\frac{E}{D}$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；圆 C 的半径取值可能为 $\underline{\hspace{2cm}}$ （请写出一个可能的半径取值）。

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $2c - b = 2a \cos B$ 。

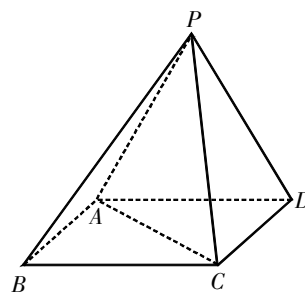
(1) 求角 A ；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$ ， D 为 AC 的中点，求 BD 长度的最小值。

16. (15 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧面 PAD 是正三角形， $PC = AC$ 。

(1) 求证：平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值。



(第 16 题)

17. (15 分) 已知函数 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$ 。

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的单调递减区间；

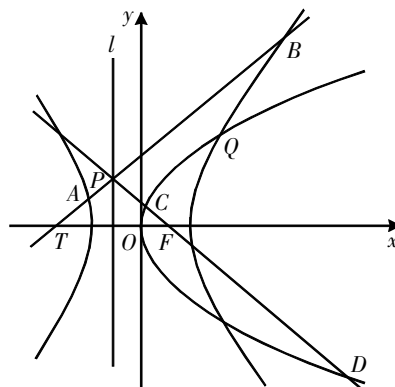
(2) 若不等式 $\frac{f(x)}{x} - 6 \ln x \leq a(x-1)^2$ 对任意 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

18. (17 分) 已知抛物线 $\Gamma_1: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 双曲线 $\Gamma_2: \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的左焦点为 T .

(1) 求 l 的方程和双曲线 Γ_2 的渐近线方程;

(2) 设 Q 为抛物线 Γ_1 和双曲线 Γ_2 的一个公共点, 求证: 直线 QT 与抛物线 Γ_1 相切;

(3) 设 P 为 l 上的动点, 且直线 PT 与双曲线 Γ_2 的左、右两支分别交于 A, B 两点, 直线 PF 与抛物线 Γ_1 交于不同的两点 C, D , 判断 $\frac{1}{|AB|} + \frac{\sqrt{3}}{|CD|}$ 是否为定值, 若是, 请求出该定值; 若不是, 请说明理由.



(第 18 题)

19. (17 分) 对于无穷数列 $\{a_n\}$ 和如下的两条性质:

P_1 : 存在实数 $\lambda > 0$, 使得 $\forall i, j \in \mathbb{N}^*$ 且 $i < j$, 都有 $a_j - a_i \geq \lambda$;

P_2 : 任意 $i, j \in \mathbb{N}^*$ 且 $i < j$, 都存在 $m \in \mathbb{N}^*$, 使得 $a_m = 2a_j - a_i$.

(1) 若 $a_n = n + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, 判断数列 $\{a_n\}$ 是否满足性质 P_1 , 并说明理由;

(2) 若 $i_1 < i_2 < \dots < i_n < \dots (i_k \in \mathbb{N}^*, k = 1, 2, 3, \dots)$, 且数列 $\{b_n\}$ 满足任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = a_{i_n}$,

则称 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的一个子数列. 设数列 $\{a_n\}$ 同时满足性质 P_1 和性质 P_2 .

① 若 $a_1 = 1$, $a_3 = 5$, 求 a_2 的取值范围;

② 求证: 存在 $\{a_n\}$ 的子数列为等差数列.