台州市2025届高三第一次教学质量评估试题

数学参考答案及评分标准　　2024.11

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分）

1	2	3	4	5	6	7	8
D	D	B	A	C	B	C	D

二、选择题（本题共3小题，每小题6分，共18分）

9	10	11
ABD	BC	ACD

三、填空题（本题共3小题，每小题5分，共15分）

12. 55　　**13.** $-\dfrac{1}{2}$　　**14.** $\sqrt{3}$ （3分），$r\in(0,1)$均可 （2分）

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13分）解：（1）已知$2c-b=2a\cos B$，由正弦定理得，

$2\sin C-\sin B=2\sin A\cos B$，因为$A+B+C=\pi$，……………………………2分

所以$2\sin(A+B)-\sin B=2\sin A\cos B$，……………………………3分

整理得$2\sin A\cos B+2\cos A\sin B-\sin B=2\sin A\cos B$，即$\cos A=\dfrac{1}{2}$，……………………5分

又因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$．……………………………6分

（2）已知$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=4\sqrt{3}$，由（1）知$A=\dfrac{\pi}{3}$，得$bc=16$，……………………8分

因为$BD^2=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2+c^2-2\cdot\dfrac{b}{2}\cdot c\cdot\cos A=\dfrac{b^2}{4}+c^2-\dfrac{1}{2}bc\ge bc-\dfrac{1}{2}bc=8$，……………………12分

当$b=2c=4\sqrt{2}$时取到等号，所以BD的最小值为$2\sqrt{2}$．……………………………13分

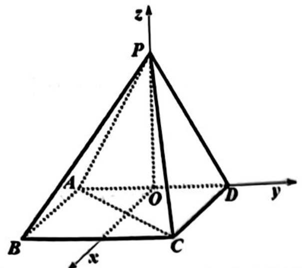
16.（15分）解：（1）不妨设正方形$ABCD$边长为2，则$PD=CD=2,AC=PC=2\sqrt{2}$，

由$PC^2=PD^2+CD^2$，得$CD\perp PD$，再由$CD\perp AD$，得$CD\perp$平面PAD，…………4分

因为$CD\subset$平面$ABCD$，所以平面$PAD\perp$平面$ABCD$．……………………………6分

（2）取AD中点O，连结PO，则$PO\perp AD$，$PO\perp$平面$ABCD$，……………………8分

以O为原点，OD，OP所在直线分别为y，z轴建立空间直角坐标系，如图所示，…9分



则 $P(0,0,\sqrt{3}),B(2,-1,0),C(2,1,0),D(0,1,0),\overrightarrow{PB}=(2,-1,-\sqrt{3})$， …11 分

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=0,\\ y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 取 $\vec{n}=(0,\sqrt{3},1)$， …13 分

记 PB 与平面 PCD 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{PB}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. ……………………15 分

17.（15 分）解：（1）$f(x)$ 的定义域为R，$f'(x)=3x^2+8x-5$， ……………………2 分

令 $3x^2+8x-5=0$，解得 $x_1=\dfrac{-4-\sqrt{31}}{3}$，$x_2=\dfrac{-4+\sqrt{31}}{3}$， ……………………4 分

由 $f'(x)<0$，解得 $\dfrac{-4-\sqrt{31}}{3}<x<\dfrac{-4+\sqrt{31}}{3}$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(\dfrac{-4-\sqrt{31}}{3},\dfrac{-4+\sqrt{31}}{3}\right)$. ……………………6 分

（2）记 $h(x)=x^2+4x-5-6\ln x-a(x-1)^2$，$x\in[1,+\infty)$，

$h'(x)=2x+4-\dfrac{6}{x}-2a(x-1)=\dfrac{2(x-1)[(1-a)x+3]}{x}$， ……………………9 分

因为 $h(2)\le 0$，所以 $7-6\ln 2-a\le 0$，得 $a\ge 7-6\ln 2>7-6=1$， ……………………10 分

令 $h'(x)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=\dfrac{3}{a-1}$， ……………………11 分

当 $a\ge 4$ 时，$\dfrac{3}{a-1}\le 1$，$h'(x)\le 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，因此，$h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

得 $h(x)\le h(1)=0$. 即 $\dfrac{f(x)}{x}-6\ln x\le a(x-1)^2$ 对任意 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立. ……………13 分

当 $1<a<4$ 时，对任意 $x\in\left(1,\dfrac{3}{a-1}\right)$，$h'(x)>0$，因此，$h(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{3}{a-1}\right)$ 上单调递增，

当 $x_0\in\left(1,\dfrac{3}{a-1}\right)$ 时，$h(x_0)>h(1)=0$，不满足题意. 综上，$a\ge 4$. ……………15 分

18.（17分）解（1）准线l的方程为$x=-1$，双曲线的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$．……4分

（2）联立方程组$\begin{cases}2x^2-y^2=6,\\ y^2=4x,\end{cases}$ ……6分

消去y得$x^2-2x-3=0$，解得$x=3$（舍负），由对称性，不妨取$Q(3,2\sqrt{3})$，……7分

又由$T(-3,0)$，求得直线QT的方程为$x-\sqrt{3}y+3=0$，……8分

联立方程组$\begin{cases}x-\sqrt{3}y+3=0,\\ y^2=4x,\end{cases}$消去$x$得$y^2-4\sqrt{3}y+12=0$，……9分

因为$\Delta=\left(-4\sqrt{3}\right)^2-48=0$，所以直线$QT$与抛物线$\Gamma_1$相切．……10分

（3）因为$T(-3,0)$，$F(1,0)$，得准线l为线段TF的中垂线，则直线PT与直线PF的倾斜角互补，即$k_{PT}=-k_{PF}$，

设$l_{PT}:y=k(x+3)$，$l_{PF}:y=-k(x-1)$，由条件知$0<|k|<\sqrt{2}$，……11分

联立方程组$\begin{cases}y=-k(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$消去$y$得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

则$|CD|=x_C+x_D+2=\dfrac{4(k^2+1)}{k^2}$，……13分

联立方程组$\begin{cases}y=k(x+3),\\ 2x^2-y^2=6,\end{cases}$消去$y$得$(2-k^2)x^2-2k^2x-k^2-6=0$，

则$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_B|=\dfrac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{2-k^2}$，……15分

所以$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{\sqrt{3}}{|CD|}=\dfrac{2-k^2}{4\sqrt{3}(k^2+1)}+\dfrac{\sqrt{3}k^2}{4(k^2+1)}=\dfrac{2-k^2+3k^2}{4\sqrt{3}(k^2+1)}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

故$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{\sqrt{3}}{|CD|}$为定值$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．……17分

19.（17分）解：（1）数列$\{a_n\}$满足性质P_1. ……1分

$\forall i,j\in\mathrm{N}^*$且$i<j$，$a_j-a_i=j+\frac{1}{j}-(i+\frac{1}{i})=(j-i)(1-\frac{1}{i\cdot j})$， ……2分

因为$i\cdot j\geq 2$，所以$1-\frac{1}{i\cdot j}\geq\frac{1}{2}$， 又因为$j-i\geq 1$，所以$(j-i)(1-\frac{1}{i\cdot j})\geq\frac{1}{2}$， ……4分

因此，存在$\lambda=\frac{1}{2}$，使得$\forall i,j\in\mathrm{N}^*$且$i<j$，都有$a_j-a_i\geq\lambda$，故$\{a_n\}$满足性质$P_1$. …5分

注：λ取$\left(0,\frac{1}{2}\right]$之间的任意实数都可以.

（2）①因为数列$\{a_n\}$满足性质P_1，所以$\{a_n\}$是单调递增数列， ……6分

又因为数列$\{a_n\}$满足性质P_2，所以存在$m\in\mathrm{N}^*$，使得$a_m=2a_2-a_1$.

而$a_m=2a_2-a_1=a_2+a_2-a_1>a_2$，因此，$m\geq 3$， ……8分

由$2a_2-a_1=a_m\geq a_3=5$，得$a_2\geq 3$， ……10分

由$a_2<a_3$，得$3\leq a_2<5$，故a_2的取值范围是$[3,5)$. ……11分

②由数列$\{a_n\}$满足性质P_1，可知$\{a_n\}$单调递增，设$a_2=a_1+d$，$d>0$， ……12分

令$i_1=1$，$i_2=2$，由性质P_2，存在$i_3\in\mathrm{N}^*$，使得$a_{i_3}=2a_{i_2}-a_{i_1}=a_1+2d$， ……13分

同理，存在$i_4\in\mathrm{N}^*$，使得$a_{i_4}=2a_{i_3}-a_{i_2}=a_1+3d$，…

以此类推，当$k\geq 2$时，存在$i_{k+1}\in\mathrm{N}^*$，使得$a_{i_{k+1}}=2a_{i_k}-a_{i_{k-1}}=a_1+kd$， ……15分

由数列$\{a_n\}$单调递增，可知$i_1<i_2<\cdots<i_n<\cdots$

记$b_n=a_{i_n}$，$n\in\mathrm{N}^*$，则$b_n=a_1+(n-1)d$， ……16分

因为$b_{n+1}-b_n=d$，$n\in\mathrm{N}^*$，所以数列$\{b_n\}$是等差数列，

故存在$\{a_n\}$的子数列$\{b_n\}$为等差数列, 得证. ……17分