

2024年11月绍兴市选考科目诊断性考试

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。

1. A 2. B 3. B 4. C 5. D 6. C 7. C 8. B

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。

9. BC 10. ACD 11. ABC

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 60 13. $\pm \sqrt{2}$ 14. $\frac{19}{81}$

四、解答题：本题共5小题，共77分。

15. (13分)解：

(1) 因为 $\sqrt{3}b\sin A = a(\cos B + 1)$,

所以 $\sqrt{3}\sin B\sin A = \sin A(\cos B + 1)$2分

又因为 $\sin A > 0$, 即 $\sqrt{3}\sin B - \cos B = 1$, 即 $\sin(B - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$4分

又因为 $-\frac{\pi}{6} < B - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$, 所以 $B - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, 即 $B = \frac{\pi}{3}$6分

(2) 在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理 $\cos B = \frac{BD^2 + BC^2 - CD^2}{2BC \cdot BD} = \frac{1}{2}$,8分

可得 $BD^2 - 2BD - 8 = 0$, 解得 $BD = 4$, 即 $c = 8$10分

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可知 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 52$11分

解得 $b = 2\sqrt{13}$13分

16. (15分)解：

(1) 因为 $f(x) = e^{*-2x-1}$, 所以 $f'(x) = e^{*-2}$,2分

所以当 $x < \ln 2$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \ln 2$ 时, $f'(x) > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上递减, 在 $[\ln 2, 1]$ 上递增.4分

因为 $f(0) = 0, f(1) = e^{-3}, f(\ln 2) = 1 - 2\ln 2$, 且 $e^{-3} < 0$,

所以 $f(x)$ 的值域是 $[1 - 2\ln 2, 0]$7分

(2) 因为 $f(x) = e^x - a$ 9分

① 若 $a \leq 1$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增,
 所以 $f(x) > f(0) = 0$, 不符合题意. 11分

② 若 $a > 1$, 当 $x < \ln a$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > \ln a$ 时, $f'(x) > 0$,
 所以 $f(x)$ 在 $(0, \ln a)$ 上递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上递增, 13分

要存在 $x_0 > 1$, 当 $x \in (0, x_0)$, $f(x) < 0$,
 则只需 $f(1) = e - a - 1 < 0$, 所以 $a > e - 1$ 15分

17. (15分) 解:

(1) 取 AD 中点 E , 连接 PE, BE ,

因为 $AB = AD = 2\sqrt{3}$, $\angle BAD = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABD$ 是正三角形, 因为 E 为 AD 中点,
 所以 $AD \perp BE$ 2分

又因为 $BC^2 + PB^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6})^2 = 36 = PC^2$, 所以 $PB \perp BC$.

因为 $BC \parallel AD$, 所以 $AD \perp PB$ 4分

又 $BE \cap PB = B$, 所以 $AD \perp$ 面 PBE 5分

所以 $AD \perp PE$, 又因为 E 为 AD 中点,

所以 $PA = PD$ 6分

解法 1: (2) 因为 $AD \perp BE, AD \perp PE$,

所以 $\angle PEB$ 是二面角 $P-AD-B$ 的平面角, 即 $\cos \angle PEB = -\frac{1}{3}$ 8分

在 $\triangle PEB$ 中, 由余弦定理 $\cos \angle PEB = \frac{BE^2 + PE^2 - PB^2}{2BE \cdot PE} = \frac{9 + PE^2 - 16}{6 \cdot PE} = -\frac{1}{3}$, 解得 $PE = 3$.

..... 9分

如图, 以点 E 为坐标原点, EA, EB 分别为 x, y 轴建立空间直角坐标系,

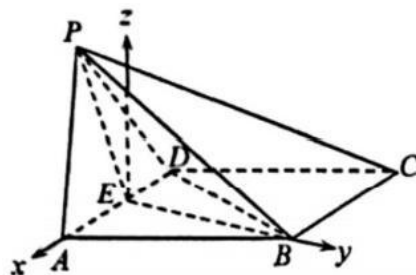
则 $A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 3, 0), C(-2\sqrt{3}, 3, 0)$,

$P(0, -1, 2\sqrt{2})$, 10分

所以 $BC = (-2\sqrt{3}, 0, 0), AB = (-\sqrt{3}, 3, 0)$,

$PA = (\sqrt{3}, 1, -2\sqrt{2})$,

设平面 ABP 的一个法向量为 $m = (x, y, z)$,



$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AP} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{3}x + 3y = 0 \\ \sqrt{3}x + y - 2\sqrt{2}z = 0 \end{cases},$$

令 $x = \sqrt{3}$, 则 $y = 1, z = \sqrt{2}$. 所以 $\vec{m} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{2})$,13分

$$\text{所以 } |\cos \langle \vec{m}, \vec{BC} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{BC}|}{|\vec{m}| |\vec{BC}|} = \frac{-6}{2\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以直线BC与平面PAB所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$15分

解法2: (2) 因为 $AD \perp BE, AD \perp PE$,

所以 $\angle PEB$ 是二面角P-AD-B的平面角, 即 $\cos \angle PEB = -\frac{1}{3}$8分

$$\text{在 } \triangle PEB \text{ 中, } \cos \angle PEB = \frac{BE^2 + PE^2 - PB^2}{2BE \cdot PE} = \frac{9 + PE^2 - 16}{6 \cdot PE} = -\frac{1}{3} \text{ 解得 } PE = 3,$$

.....9分

所以 $AP = 2\sqrt{3}$, 所以 $PA = AB$, 且 $PA^2 + AB^2 = PB^2$,

取PB中点F, 连接AF, DF,

在等腰直角三角形PAB中, $AF = \sqrt{6}$, 同理 $DF = \sqrt{6}$,11分

所以 $AF^2 + DF^2 = AD^2$, 所以 $DF \perp AF$, 又 $DF \perp PB$,

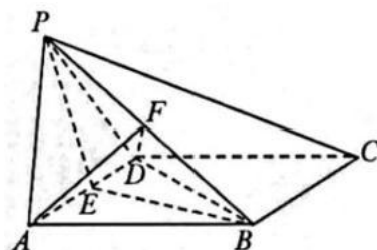
所以 $DF \perp$ 平面PAB,

所以 $\angle DAF$ 即为直线AD与平面PAB所成角,

.....13分

$$\text{又 } \sin \angle DAF = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 而 } AD \parallel BC,$$

所以直线BC与平面PAB所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$15分



18. (17分) 解:

(1) 由题意知 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$ 又 $a^2 + b^2 = 7$, 解得 $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$.

所以C的方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4

(2)(i) 设直线AB的方程为 $x = my - 1$, 联立 $\begin{cases} x = my - 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $(3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0$,

设A(x,y),B(x₂,y₂),P(x,y), 则 $y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}$, $y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$ 6分

因为△PAB的重心为原点, 所以 $y_1 + y_2 + y_3 = 0$,

所以 $y_3 = \frac{-6m}{3m^2 + 4}$, 又 $x_3 = -(x_1 + x_2) = -m(y_1 + y_2) + 2 = \frac{8}{3m^2 + 4}$,
.....8分

代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 可得 $\frac{12m^2 + 16}{(3m^2 + 4)^2} = 1$,

解得 $m=0$, 所以直线AB的方程是 $x=-1$10分

解法1: (ii) 设 $G(t,0)$, 由 (i) 可知 $y_3 = \frac{-6m}{3m^2 + 4}$, $x_3 = 3 - (x_1 + x_2) = 3 + \frac{8}{3m^2 + 4}$ 12分

代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 可得 $\frac{(3t + \frac{8}{3m^2 + 4})^2}{4} + \frac{12m^2}{(3m^2 + 4)^2} = 1$.

解得 $3t^2 + \frac{16}{3m^2 + 4}t - \frac{4m^2}{3m^2 + 4} = 0$, 所以 $m^2 = -\frac{4(3t^2 + 4t)}{9t^2 - 4} \geq 0$14分

所以 $(3t+4)t(3t+2)(3t-2) \leq 0$, 且 $t \neq \pm \frac{2}{3}$,

所以 $t \in [-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) \cup [0, \frac{2}{3})$17分

解法2: (ii) 设 $G(t,0)$, 由 (i) 可知 $y_3 = \frac{-6m}{3m^2 + 4}$, $x_3 = 3 - (x_1 + x_2) = 3 + \frac{8}{3m^2 + 4}$,12分

代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 可得 $\frac{(3t + \frac{8}{3m^2 + 4})^2}{4} + \frac{12m^2}{(3m^2 + 4)^2} = 1$,

解得 $3t^2 + \frac{16}{3m^2 + 4}t - \frac{4m^2}{3m^2 + 4} = 0$,13分

① 当 $t < 0$ 时, $t = -\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{9m^4 + 12m^2 + 16} + 4}{3m^2 + 4}$ 令 $u = 3m^2 + 4 \geq 4$

则 $t = -\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{u^2 - 4u + 16} + 4}{u}$ 在 $(4, +\infty)$ 上递增, 所以 $t \in [-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$,15分

② 当 $t \geq 0$ 时, $t = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{9m^4 + 12m^2 + 16} - 4}{3m^2 + 4}$ 令 $u = 3m^2 + 4 \geq 4$,

则 $t = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{u^2 - 4u + 16} - 4}{u}$ 在 $(4, +\infty)$ 上递增, 所以 $t \in [0, \frac{2}{3})$ 17分

综上所述 $t \in [-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) \cup [0, \frac{2}{3})$.

19. (17分)解:

$$(1) D(m_2) = \{(1, 0)\}, D(m_3) = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(2)(i) 设 $D(m)$ 中元素的个数为 a_n , 由于 $f(m) = 1 + x_1 + x_1 x_2 + \dots + x_1 x_2 \dots x_n$, 为偶数,

$$f(m) = 1 + x(1 + x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_2 \dots x_n), \quad \text{则 } x = 1, \text{ 且 } a_n = 2^{n-1} - a_{n-1}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } a_n &= 2^{n-1} - 2^{n-2} + a_{n-2} = 2^{n-1} - 2^{n-2} + 2^{n-3} - a_{n-3} = \dots\dots\dots \\ &= 2^{n-1} - 2^{n-2} + 2^{n-3} - 2^{n-4} + \dots + (-1)^{n-3} \cdot 2^2 + (-1)^{n-2} \cdot 2 + (-1)^{n-1} \cdot 1 \\ &= \frac{(-1)^{n-1} \cdot [1 - (-2)^n]}{1 - (-2)} = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{即 } a_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3},$$

$$\text{故 } D(m_n) \text{ 中元素的个数为 } \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

解法1: (ii) 令 $b_n = \sum_{m_n \in D(m_n)} g(m_n)$, $D(m_n)$ 表示使得 $f(m_n)$ 为偶数的所有 m_n 的集合,

当 $n = 2k$ 时,

① 当 $m_{2k} = (x, x_2, \dots, x_{2k}) = (1, 0, *, *, \dots, *)$ 时,

$$\sum_{m_{2k} = (1, 0, *, *, \dots, *) \in D(m_{2k})} g(m_{2k}) = 1 \times 2^{2k-2} + 2^{2k-3} \times (2k-2) = k \times 2^{2k-2} \quad \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

② 当 $m_{2k} = (x, x_2, \dots, x_{2k}) = (1, 1, 1, 0, *, *, \dots, *)$ 时,

$$\sum_{m_{2k} = (1, 1, 1, 0, *, *, \dots, *) \in D(m_{2k})} g(m_{2k}) = 3 \times 2^{2k-4} + 2^{2k-5} \times (2k-4) = (k+1) \times 2^{2k-4}.$$

③ 当 $m_{2k} = (x, x_2, \dots, x_{2k}) = (1, 1, 1, 1, 1, 0, *, *, \dots, *)$ 时,

$$\sum_{m_{2k} = (1, 1, 1, 1, 1, 0, *, *, \dots, *) \in D(m_{2k})} g(m_{2k}) = 5 \times 2^{2k-6} + 2^{2k-7} \times (2k-6) = (k+2) \times 2^{2k-6}.$$

④ 当 $m_{2k} = (x, x_2, \dots, x_{2k}) = (1, 1, \dots, 1, 0, *, *)$ 时,

$$\sum 8(m_{2k}) = (2k-3) \times 2^2 + 2 \times 2 = (2k-2) \times 2.$$

⑤ 当 $m_{2k} = (x, x_2, \dots, x_{2k}) = (1, 1, \dots, 1, 0)$ 时,

$$\sum_{m_{2k} = (1, 1, \dots, 1, 0) \in D(m_{2k})} g(m_{2k}) = (2k-3) \times 2^2 + 2 \times 2 = (2k-1) \times 1.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } b_{2k} &= \sum_{m_{2k} \in D(m_{2k})} g(m_{2k}) = k \times 2^{2k-2} + (k+1) \times 2^{2k-4} + (k+2) \times 2^{2k-6} + \dots + (2k-2) \times 2^2 + (2k-1) \times 2^0 \\ &= \sum_{i=1}^k ((2k-i) \times 2^{2i-2}) = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^k 4^i - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k i \cdot 4^i = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^k 4^i - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \left(\frac{3(i+1)-4}{9} \cdot 4^{i+1} - \frac{3i-4}{9} \cdot 4^i \right) \\ &= \frac{k}{2} \cdot \frac{4 \cdot (1-4^k)}{1-4} - \frac{1}{4} \left(\frac{3(k+1)-4}{9} \cdot 4^{k+1} - \frac{3-4}{9} \cdot 4 \right) = \frac{(3k+1)4^k - (6k+1)}{9}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{分} \end{aligned}$$

同理, 当 $n = 2k+1$ 时,

$$b_{2k+1} = \sum_{m_{2k+1} \in D(m_{2k+1})} g(m_{2k+1}) = (2k+1) \times 2^{2k-2} + (2k+3) \times 2^{2k-4} + (2k+5) \times 2^{2k-6}$$

$$+\cdots+(2k+2k-1)\times 2^0+2k+1=\frac{(6k+5)4^k+6k+4}{9}.$$

..... 16分

$$\text{故 } b_n = \sum_{m_n \in D(m_n)} g(m_n) = \begin{cases} \frac{(3k+1)4^k - (6k+1)}{9}, & n=2k \\ \frac{(6k+5)4^k + 6k+4}{9}, & n=2k+1 \end{cases}$$

由此 $b_9=828 < 3986=b_{10}, h_{10}=1817 < 8643=h_{11}$,

可知使得 $\sum_{m_n \in D(m_n)} g(m_n) \leq 2025$ 成立的最大正整数 $n=10$17分

解法2:(ii)①当 $mn=(x, X_2, \dots, x_n)=(1, 0, *, \dots)$ 时, 则

$$\sum_{m_n=(1, 0, *, \dots, *) \in D(m_n)} g(m_n) = 2^{n-2} + (n-2) \times 2^{n-3} = n \times 2^{n-3},$$

..... 12分

②当 $m_n=(x, X_2, \dots, x_n)=(1, 1, 1, 0, *, \dots)$ 时, 则

$$\sum_{m_n=(1, 1, 1, 0, *, \dots, *) \in D(m_n)} g(m_n) = 3 \times 2^{n-4} + (n-4) \times 2^{n-5} = (n+2) \times 2^{n-5}.$$

③当 $m_n=(x, X_2, \dots, x_n)=(0, 1, 1, 1, 1, 0, *, \dots)$ 时, 则

$$\sum_{m_n=(1, 1, 1, 1, 1, 0, *, \dots, *) \in D(m_n)} g(m_n) = 5 \times 2^{n-6} + (n-6) \times 2^{n-7} = (n+4) \times 2^{n-7}.$$

.....

要使得 $\sum_{m_n \in D(m_n)} g(m_n) \leq 2025$ 成立, 其必要条件是当

$mn=(x, X_2, \dots, x_n)=(1, 0, *, *, \dots, *)$ 时,

$$\sum_{m_n=(1, 0, *, *, \dots, *) \in D(m_n)} g(m_n) = 2^{n-2} + (n-2) \times 2^{n-3} = n \times 2^{n-3} \leq 2025, \text{ 解得 } n \leq 10,$$

... .. 15分

而当 $n=10$ 时,

$$\sum_{m_n \in D(m_n)} g(m_n) = 10 \times 2^7 + 12 \times 2^5 + 14 \times 2^3 + 16 \times 2^1 + 9 \times 2^0 = 1817 \leq 2025,$$

所以最大正整数 $n=10$.

... .. 17分