

2024 年 11 月绍兴市高考科目诊断性考试

数 学

本科试题卷分选择题和非选择题两部分，全卷共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

考生注意：

1. 答题前，请务必将自己的学校、班级、姓名、座位号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的位置上。

2. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范作答，在本试题卷上的作答一律无效。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$ ， $B = \{-2, 0, 1, 3\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{-2, 0, 1\}$ C. $\{0, 1, 3\}$ D. $\{-2, 0, 1, 3\}$

2. 若 $\frac{1}{z-1} = 1-i$ ，则 $z =$

- A. $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ B. $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ D. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

3. 已知 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ ， $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ ，则 $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} =$

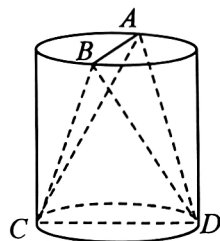
- A. $\frac{1}{5}$ B. 5 C. $-\frac{1}{5}$ D. -5

4. 已知向量 $a = (-1, 2)$ ， $b = (2, 0)$ ，则 a 在 b 上的投影向量是

- A. $(-2, 0)$ B. $(2, 0)$ C. $(-1, 0)$ D. $(1, 0)$

5. 如图，圆柱的底面直径为 3，母线长为 4， AB ， CD 分别为该圆柱的上、下底面的直径，且 $AB \perp CD$ ，则三棱锥 $A-BCD$ 的体积是

- A. 24 B. 18
C. 12 D. 6



6. 已知直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 且 $OA \perp OB$, 过点 O 作 l 的垂线, 垂足为 $E(2, 1)$, 则 $p =$

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

7. 已知函数 $F(x) = x^2 f(x)$, 且 $x = 0$ 是 $F(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 可以是

- A. $\sin x$ B. $\ln(x+1)$ C. e^x D. $x-1$

8. 摩天轮是一种大型转轮状的机械游乐设施, 游客坐在摩天轮的座舱里可从高处俯瞰四周景色. 如图, 某摩天轮最高点距离地面高度为 120m , 转盘直径为 110m , 均匀设置有 48 个座舱 (按顺时针依次编号为 1 至 48 号), 开启后按逆时针方向匀速旋转, 游客在座舱转到距离地面最近的位置进舱, 转一周需要 30min . 甲、乙两户家庭去坐摩天轮, 甲家庭先坐上了 1 号座舱, 乙家庭坐上了 k 号座舱, 若从乙家庭坐进座舱开始计时, 10min 内 (含 10min) 出现了两户家庭的座舱离地面高度一样的情况, 则 k 的最小值是

- A. 16
B. 17
C. 18
D. 19



二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 随着农业现代化的持续推进, 中国农业连年丰收, 农民收入持续增加, 农村活力不断增强, 乡村全面振兴的美好蓝图变成现实. 某地农科院为研究新品种大豆, 在面积相等的 100 块试验田上种植一种新品种大豆, 得到各块试验田的亩产量 (单位: kg), 并整理得下表:

亩产量	$[150, 160)$	$[160, 170)$	$[170, 180)$	$[180, 190)$	$[190, 200)$	$[200, 210]$
频数	5	10	25	40	15	5

则 100 块试验田的亩产量数据中

- A. 中位数低于 180kg B. 极差不高于 60kg
C. 不低于 190kg 的比例超过 15% D. 第 75 百分位数介于 190kg 至 200kg 之间

10. 下列各组函数的图象, 通过平移后能重合的是

A. $y = \sin x$ 与 $y = -\sin x$

B. $y = x^3$ 与 $y = x^3 - x$

C. $y = 2^x$ 与 $y = 3 \cdot 2^x$

D. $y = \lg x$ 与 $\lg(3x)$

11. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp PB$, $PA=1$, Q 是底面 $\triangle ABC$ 内 (含边界) 一点, 则下列说法正确的是

A. 点 Q 到该三棱锥三个侧面的距离之和为定值

B. 顶点 A , B , C 到直线 PQ 的距离的平方和为定值

C. 直线 PQ 与该三棱锥三个侧面所成角的正弦值的和有最大值 $\sqrt{3}$

D. 直线 PQ 与该三棱锥四个面所成角的正弦值的平方和有最大值 $\frac{3}{2}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 在二项式 $(\frac{2}{x} - \sqrt{x})^6$ 的展开式中, 常数项为 ▲ .

13. 若曲线 $y = e \ln x$ 在点 (e, e) 处的切线与圆 $(x-a)^2 + y^2 = 1$ 相切, 则 $a =$ ▲ .

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 等可能取 -1 , 0 或 1 , 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 0$, $b_{n+1} = b_n + a_n$, 则 $b_5 = 0$ 的概率是 ▲ .

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

记 $\triangle ABC$ 三个内角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 且 $\sqrt{3}b \sin A = a(\cos B + 1)$.

(1) 求 B ;

(2) 设 CD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 若 $CD = 2\sqrt{3}$, $a = 2$, 求 b .

16. (15 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的值域;

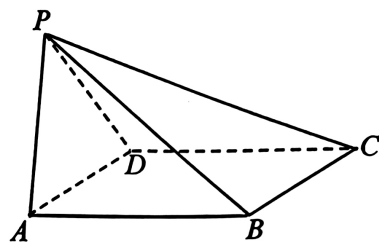
(2) 若存在 $x_0 > 1$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f(x) < 0$, 求 a 的取值范围.

17. (15 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $AB = 2\sqrt{3}$, $PB = 2\sqrt{6}$, $PC = 6$, $\angle BAD = 60^\circ$.

(1) 证明: $PA = PD$;

(2) 若二面角 $P-AD-B$ 的余弦值为 $-\frac{1}{3}$, 求直线 BC 与平面 PAB 所成角的正弦值.



18. (17 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 短轴端点和长轴端点间的距离为 $\sqrt{7}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过左焦点的直线交 C 于 A, B 两点, 点 P 在 C 上.

(i) 若 $\triangle PAB$ 的重心 G 为坐标原点, 求直线 AB 的方程;

(ii) 若 $\triangle PAB$ 的重心 G 在 x 轴上, 求 G 的横坐标的取值范围.

19. (17 分)

n 维向量是平面向量和空间向量的推广, 对 n 维向量 $\mathbf{m}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n) (x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n)$, 记 $f(\mathbf{m}_n) = 1 + x_1 + x_1x_2 + \dots + x_1x_2 \cdots x_n$, 设集合 $D(\mathbf{m}_n) = \{\mathbf{m}_n | f(\mathbf{m}_n) \text{ 为偶数}\}$.

(1) 求 $D(\mathbf{m}_2)$, $D(\mathbf{m}_3)$;

(2) (i) 求 $D(\mathbf{m}_n)$ 中元素的个数;

(ii) 记 $g(\mathbf{m}_n) = \sum_{i=1}^n x_i$, 求使得 $\sum_{\mathbf{m}_n \in D(\mathbf{m}_n)} g(\mathbf{m}_n) \leq 2025$ 成立的最大正整数 n .