2024年高三基础测试

数学 参考答案 （2024.9）

一、单选题（40分）

1～8　ACBD　CBAD；

第8题：令$T_n = f(2) = a_0 2^n + a_1 2^{n-1} + \cdots + a_{n-1} 2 + a_n = 5\times 2^{n+1} - 3n - 8$，

当$n\geqslant 1$时，$2T_{n-1} = a_0 2^n + a_1 2^{n-1} + \cdots + a_{n-1} 2 = 5\times 2^{n+1} - 6n - 10$，

两式相减可得$T_n - 2T_{n-1} = a_n = 3n + 2 (n\geqslant 1)$ ①，当$n=0$时，$T_0 = a_0 = 2$，满足①式，

所以$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2 + 5 + \cdots + 3n + 2 = \dfrac{(3n+4)(n+1)}{2} = \dfrac{3n^2 + 7n + 4}{2}$，故选D.

（注：资料来源于人教版初中七年级上册“方程”史话）

二、多选题（18分）

9．ABD；　　10．答案ACD；　　11．AB；

第11题：因为$\{y|y = f(x), x\in[0,1]\} = M$，设当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)\in N$，则$N\subseteq M$，

当$a = \dfrac{1}{4}$时，$f(x) = f\left(\dfrac{3x}{4x^2+1}\right)$，令$t(x) = \dfrac{3x}{4x^2+1}$，当$x\in(1,+\infty)$时，

$t(x) = \dfrac{3}{4x + \dfrac{1}{x}} \in \left(0, \dfrac{3}{5}\right) \subseteq [0,1]$满足条件；

当$a = \dfrac{1}{2}$时，$f(x) = f\left(\dfrac{3x}{2x^2+1}\right)$，令$t(x) = \dfrac{3x}{2x^2+1}$，当$x\in(1,+\infty)$时，

$t(x) = \dfrac{3}{2x + \dfrac{1}{x}} \in (0,1) \subseteq [0,1]$满足条件；

当$a = \dfrac{3}{4}$时，$f(x) = f\left(\dfrac{9x}{4x^2+3}\right)$，令$t(x) = \dfrac{9x}{4x^2+3}$，则始终有$t\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$，即$x_0 = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$无法转到定义域$[0,1]$求解，故不满足；

当$a = 1$时，$f(x) = f\left(\dfrac{3x}{x^2+1}\right)$，令$t(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$，则始终有$t(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$，即$x_0 = \sqrt{2}$无法转到定义域$[0,1]$求解，故不满足.

（注：本题改编自2022上海高考题）

三、填空题（15 分）

12．-10；　　　13．$-\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{5}$；　　　14．$2-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$；

第 14 题：作 $MN\perp AC$，垂足 N，则 $MN\perp$ 底面 ABC，再作 $NE\perp AB,NF\perp BC$，则垂足分别为 E,F，则 $\alpha=\angle MEN,\beta=\angle MFN$，又正方体中 $AB=2$，$AD=AA_1$，设 $NE=x(0\le x\le 1)$，则 $NF=2(1-x)$，所以 $\tan\alpha=\dfrac{1}{x},\tan\beta=\dfrac{1}{2(1-x)}$，

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2(1-x)}}{1-\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{2(1-x)}}=\dfrac{2-x}{2x(1-x)-1}=\dfrac{2-x}{-2x^2+2x-1}$，

设 $t=2-x\in[1,2]$，则 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{t}{-2t^2+6t-5}=\dfrac{1}{-2t-\dfrac{5}{t}+6}\ge\dfrac{1}{6-2\sqrt{10}}=-\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$

当且仅当 $t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，即 $x=2-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 时，$\tan(\alpha+\beta)$ 取到最小值，又 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$

所以当 $x=2-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 时，$\alpha+\beta$ 取到最小，此时 $\lambda=\dfrac{A_1M}{A_1C_1}=x=2-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$．

四、解答题：本题共 6 小题，共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $(b+c-a)(b+c+a)=bc$．

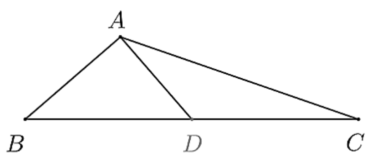
（1）求 A；

（2）若 D 为 BC 边上一点，$\angle BAD=3\angle CAD$，$AC=4$，$AD=\sqrt{3}$，求 $\sin B$．

15．【解析】（1）$(b+c-a)(b+c+a)=(b+c)^2-a^2=b^2+2bc+c^2-a^2=bc$，则

$b^2+c^2-a^2=-bc$，所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$．

（2）法①：如图在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理



$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos\angle DAC$

$=3+16-2\sqrt{3}\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=7$，即 $CD=\sqrt{7}$，

在$\triangle ACD$中由正弦定理$\dfrac{CD}{\sin\angle DAC}=\dfrac{AD}{\sin C}$，即$\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}$，所以$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，因为

$0<C<\dfrac{\pi}{3}$，故$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$，

在$\triangle ABC$中$\sin B=\sin\left(A+C\right)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{5}{2\sqrt{7}}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

法②：同解法①$CD=\sqrt{7}$，在$\triangle ACD$中由正弦定理$\dfrac{CD}{\sin\angle DAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$，即

$\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{\sin\angle ADC}$，所以$\sin\angle ADC=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$\cos\angle ADC=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

又因为$\angle ADC=\angle BAD+\angle B=B+\dfrac{\pi}{2}$，即$\cos\left(B+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

法③同上$CD=\sqrt{7}$，在直角$\triangle ABD$中$BD=\sqrt{c^2+3}$，所以$a=\sqrt{c^2+3}+\sqrt{7}$，

由（1）问知$a^2=b^2+c^2+bc$，所以$\left(\sqrt{c^2+3}+\sqrt{7}\right)^2=c^2+4c+16$，即

$c^2+2\sqrt{7}\sqrt{c^2+3}+10=c^2+4c+16$，得$\sqrt{7}\sqrt{c^2+3}=2c+3$，即$c^2-4c+4=0$，所以$c=2$，

$BD=\sqrt{7}$，$\sin B=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

法④如图由（1）知$A=\dfrac{2\pi}{3}$，则$\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$，

因为$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，所以

$\dfrac{1}{2}\times 4c\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}c+\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{6}$，即$\sqrt{3}c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c+\sqrt{3}$，解得$c=2$，所以

$a^2=b^2+c^2+bc=16+4+8=28$，即$a=2\sqrt{7}$，

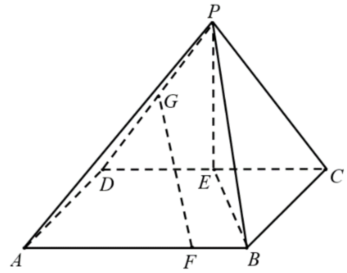
在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，即$\dfrac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4}{\sin B}$，解得$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

16.（15分）

如图，已知四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$是边长为6的正方形，侧面$PCD\perp$底面$ABCD$，$PC=PD=5$，点E，G分别是DC，DP的中点，点F在棱AB上且$AF=3FB$.

（1）求证：FG // 平面 BPE；

（2）求直线 FG 与平面 PBC 所成的角的正弦值.

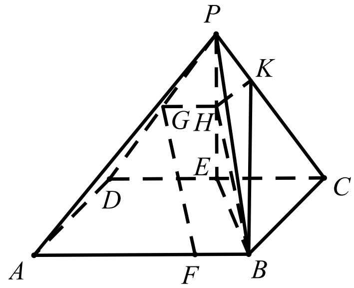


解：（方法一）

（1）取 PE 的中点 H，连接 GH,BH，

因为点 G 是 DP 的中点，所以 GH // DE，且 $GH=\frac{1}{2}DE$，

正方形中，点 E 是 CD 的中点，$AF=3FB$，



所以 $BF=\frac{1}{4}AB=\frac{1}{2}DE$，且 AF // DE，

所以 GH // BF，且 $GH=BF$，所以四边形 $BHGF$ 是平行四边形，所以 GF // BH，又 $GF\not\subset$ 平面 BPE，$BH\subseteq$ 平面 BPE，所以 FG // 平面 BPE.

（2）过点 H 作 $HK\perp PC$，垂足为 K，连接 BK，由题意知 $BC\perp DC$，又侧面 $PCD\perp$ 底面 $ABCD$，侧面 $PCD\cap$ 底面 $ABCD=DC$，$BC\subseteq$ 平面 $ABCD$，

所以 $BC\perp$ 底面 PCD，又 $HK\subseteq$ 平面 PCD，所以 $BC\perp HK$，

又 $BC\cap PC=C$，$BC,PC\subseteq$ 平面 PBC，所以 $HK\perp$ 底面 PBC，

所以 $\angle HBK$ 为直线 BH 与平面 PBC 所成的角，

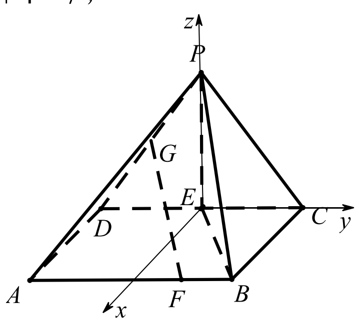
记直线 FG 与平面 PBC 所成的角为 θ，由（1）知 GF // BH，所以 $\theta=\angle HBK$，

又由题意知，$EH=PH=\frac{1}{2}PE=2$，所以 $HK=PH\cdot\sin\angle HPK=2\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$，

又 $BE=\sqrt{BC^2+EC^2}=3\sqrt{5}$，所以 $BH=\sqrt{BE^2+EH^2}=\sqrt{45+4}=7$，

所以 $\sin\theta=\sin\angle HBK=\frac{HK}{BH}=\frac{6}{35}$，

所以直线 FG 与平面 PBC 所成的角的正弦值为 $\frac{6}{35}$.



（方法二）

（1）$PC=PD=5$，点 E 是 DC 的中点，所以 $PE\perp CD$，

又侧面 $PCD\perp$ 底面 $ABCD$，侧面 $PCD\cap$ 底面 $ABCD=CD$，$PE\subseteq$ 平面 PCD，所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，

如图以点 E 为坐标原点，直线 EC,EP 为 y 轴和 z 轴建立空间直角坐标系，

则 $E(0,0,0),P(0,0,4),F(6,\frac{3}{2},0),D(0,-3,0),B(6,3,0)$， $C(0,3,0)$

所以 $G(0,-\frac{3}{2},2)$，所以 $\overrightarrow{FG}=(-6,-3,2)$， $\overrightarrow{EP}=(0,0,4)$， $\overrightarrow{EB}=(6,3,0)$

设平面 BPE 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EP}=4z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}=6x+3y=0\end{cases}$，

取 $y=2$ 得 $x=-1,z=0$，所以 $\vec{n}=(-1,2,0)$，所以 $\overrightarrow{FG}\cdot\vec{n}=-1\times(-6)+2\times(-3)=0$，即 $\overrightarrow{FG}\perp\vec{n}$，

又 FG 不在平面 BPE 内，所以 $FG\cap$ 平面 $BPE=\varnothing$，所以 $FG//$ 平面 BPE .

（2）由（1）知 $\overrightarrow{FG}=(-6,-3,2)$ ， $\overrightarrow{BP}=(-6,-3,4)$， $\overrightarrow{BC}=(-6,0,0)$

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 PBC 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-6x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-6x-3y+4z=0\end{cases}$，

取 $z=3$ 得 $x=0,y=4$，所以 $\vec{n}=(0,4,3)$，

所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{FG}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{FG}}{|\vec{n}||\overrightarrow{FG}|}=\frac{-12+6}{\sqrt{36+9+4}\times5}=-\frac{6}{35}$，

设直线 FG 与平面 PBC 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{FG}>|=|\frac{-6}{35}|=\frac{6}{35}$，

所以直线 FG 与平面 PBC 所成的角的正弦值为 $\frac{6}{35}$.

17.（15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=2x-a\ln x\ \left(a\in\mathbf{R}\right)$， $g\left(x\right)=-x^2-x$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性;

（2）若存在 $x\in\left(1,+\infty\right)$，使得函数 $f\left(x\right)\leqslant g\left(x\right)$ 成立，求证： $a>5\mathrm{e}$.

参考数据： $7.3<\mathrm{e}^2<7.4$， $20<\mathrm{e}^3<20.1$.

解：（1）函数 $f(x)=2x-a\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，则 $f'(x)=2-\frac{a}{x}$

当 $a\le 0$ 时， $f'(x)=2-\frac{a}{x}>0$，所以 $f(x)$ 单调递增，即 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$，

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=2-\dfrac{a}{x}=0$ 得 $x=\dfrac{a}{2}$，分析得 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,\dfrac{a}{2})$，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(\dfrac{a}{2},+\infty)$，

综上所述，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,\dfrac{a}{2})$，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(\dfrac{a}{2},+\infty)$.

（2）方法一：由 $f(x)\leqslant g(x)$ 得 $2x-a\ln x\leqslant -x^2-x$，所以 $a\ln x\geqslant x^2+3x$，

因为 $x\in(1,+\infty)$，所以 $a\geqslant \dfrac{x^2+3x}{\ln x}$，由题意知 $a\geqslant (\dfrac{x^2+3x}{\ln x})_{\min}$，

记函数 $r(x)=\dfrac{x^2+3x}{\ln x}(x>1)$，则 $r'(x)=\dfrac{(2x+3)\ln x-(x+3)}{\ln^2 x}$，

记 $p(x)=(2x+3)\ln x-(x+3)$，则当 $x>1$ 时，$p'(x)=2\ln x+\dfrac{2x+3}{x}-1=2\ln x+\dfrac{3}{x}+1>0$

所以函数 $p(x)=(2x+3)\ln x-(x+3)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $p(\mathrm{e})=(2\mathrm{e}+3)-(\mathrm{e}+3)=\mathrm{e}>0$，

因为 $2^7=128$，$\mathrm{e}^5=\mathrm{e}^2\mathrm{e}^3>7\times 20=140$，所以 $p(2)=7\ln 2-5<0$

所以存在 $x_0\in(2,\mathrm{e})$，使得 $p(x_0)=0$，即 $(2x_0+3)\ln x_0-(x_0+3)=0$，则 $\ln x_0=\dfrac{x_0+3}{2x_0+3}$，

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$r'(x)<0$，$r(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$r'(x)>0$，$r(x)$ 单调递增；

所以 $r(x)_{\min}=r(x_0)=\dfrac{x_0^2+3x_0}{\ln x_0}=\dfrac{(x_0^2+3x_0)(2x_0+3)}{x_0+3}=x_0(2x_0+3)>14>5\mathrm{e}$，

所以 $a\geqslant r(x)_{\min}>5\mathrm{e}$，证毕.

方法二：存在 $x\in(1,+\infty)$，使得函数 $f(x)\leqslant g(x)$ 成立

$\Leftrightarrow$ 存在 $x\in(1,+\infty)$，使得函数 $a\ln x-x^2-3x\geqslant 0$ 成立，

记 $h(x)=a\ln x-x^2-3x(x\geqslant 1)$，则 $h'(x)=\dfrac{a}{x}-2x-3=\dfrac{a-2x^2-3x}{x}(x\geqslant 1)$，

当 $a\leqslant 5$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，所以 $h(x)$ 单调递减，则 $h(x)\leqslant h(1)=-4<0$，不合题意；

当 $a>5$ 时，存在 $x_0\in(1,+\infty)$，$h'(x_0)=\dfrac{a-2x_0^2-3x_0}{x_0}=0$，即 $a=2x_0^2+3x_0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(1,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h_{\max}(x)=h(x_0)=a\ln x_0-x_0^2-3x_0=(2x_0^2+3x_0)\ln x_0-x_0^2-3x_0(x_0>1)$，

所以 $h'(x_0)=(4x_0+3)\ln x_0+2x_0+3-2x_0-3=(4x_0+3)\ln x_0>0$，则 $y=h(x_0)$ 单调递增，

又 $h(2)=14\ln 2-10=2\ln\dfrac{2^7}{e^5}<0$，$h(e)=e^2>0$，所以 $2<x_0<e$，

所以 $a=2x_0^2+3x_0>14>5e$.

18.（17 分）

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $M\left(t,2\right)$ 是 C 上的一点，且 $|MF|=2$.

（1）求抛物线的方程；

（2）设点 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$（其中 $x_1<x_2$）是 C 上异于 M 的两点，$\angle AMB$ 的角平分线与 x 轴垂直，N 为线段 AB 的中点.

（ⅰ）求证：点 N 在定直线上；

（ⅱ）若 $\triangle MAB$ 的面积为 6，求点 A 的坐标.

【解析】：（1）因为 $|MF|=2$，由抛物线的定义得 $t+\dfrac{p}{2}=2$，又 $2pt=4$，所以 $t=\dfrac{2}{p}$，

因此 $\dfrac{2}{p}+\dfrac{p}{2}=2$，即 $p^2-4p+4=0$，解得 $p=2$，从而抛物线的方程为 $y^2=4x$.

（2）（ⅰ）由（1）知点 M 的坐标为 $M\left(1,2\right)$，因为 $\angle AMB$ 的角平分线与 x 轴垂直，所以可知 MA，MB 的倾斜角互补，即 MA，MB 的斜率互为相反数，$k_{MA}=\dfrac{y_1-2}{x_1-1}=\dfrac{y_1-2}{\dfrac{y_1^2}{4}-1}=\dfrac{4}{y_1+2}$，

同理 $k_{MB}=\dfrac{4}{y_2+2}$，则 $k_{MA}+k_{MB}=\dfrac{4}{y_1+2}+\dfrac{4}{y_2+2}=0$，化简得 $y_1+y_2=-4$，则 $y_N=\dfrac{y_1+y_2}{2}=-2$，

所以点 N 在定直线 $y=-2$ 上.

（ⅱ）$k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y_1-y_2}{\dfrac{y_1^2}{4}-\dfrac{y_2^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=-1$，则直线 AB：$y-y_1=-\left(x-x_1\right)$，即

$x+y-y_1-\dfrac{y_1^2}{4}=0$，

线段 AB 的长度：$|AB|=\sqrt{2}|y_1-y_2|$，点 $M(1,2)$ 到直线 AB 的距离 $d_{M\to AB}=\dfrac{\left|3-y_1-\dfrac{y_1^2}{4}\right|}{\sqrt{2}}$，

可得 $\triangle MAB$ 的面积为 $S_{\triangle MAB}=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times d_{M\to AB}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}|y_1-y_2|\times\dfrac{\left|3-y_1-\dfrac{y_1^2}{4}\right|}{\sqrt{2}}$，因为 $y_1+y_2=-4$，且 $-2<y_1<2$，化简得

$S_{\triangle MAB}=\dfrac{1}{2}|2y_1+4|\dfrac{\left|12-4y_1-y_1^2\right|}{4}=\dfrac{1}{4}(y_1+2)\left[16-(y_1+2)^2\right]=6$，

令 $t=y_1+2\in(0,4)$，则 $t^3-16t+24=0$，即 $(t-2)(t^2+2t-12)=0$，解得 $t=2$ 或 $t=-1\pm\sqrt{13}$，

由 $t=y_1+2\in(0,4)$ 知 $t=2$ 或 $t=-1+\sqrt{13}$，所以 $\begin{cases}y_1=0,\\x_1=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y_1=\sqrt{13}-3,\\x_1=\dfrac{11-3\sqrt{13}}{2},\end{cases}$ 所求点 A 的坐标为 $A(0,0)$，或者 $A\left(\dfrac{11-3\sqrt{13}}{2},\sqrt{13}-3\right)$.

（注：本题改编自 2022 新高考I卷）

19．（17 分）

当 n_1，n_2，$\cdots$，$n_k\in\mathbf{N}^*$，且 $n_1<n_2<\cdots<n_k$ 时，我们把 a_{n_1}，a_{n_2}，$\cdots$，a_{n_k} 叫做数列 $\{a_n\}$ 的 k 阶子数列，若 a_{n_1}，a_{n_2}，$\cdots$，a_{n_k} 成等差（等比）数列，则称 a_{n_1}，a_{n_2}，$\cdots$，a_{n_k} 为 k 阶等差(等比)子数列. 已知项数为 n（$n\geqslant4$，且 $n\in\mathbf{N}^*$）的等差数列 $\{b_n\}$ 的首项 $b_1=\sqrt{2}$，公差 $d=2$.

（1）写出数列 b_1，b_2，$\cdots$，b_6 的所有 3 阶等差子数列;

（2）数列 $\{b_n\}$ 中是否存在 3 阶等比子数列？若存在，请至少写出一个；若不存在，请说明理由;

（3）记数列 $\{b_n\}$ 的 3 阶和 4 阶等差子数列个数分别为 A，B，求证：$A\leqslant2B$.

19.【解析】（1）所求三阶等差子数列为b_1,b_2,b_3；b_2,b_3,b_4；b_3,b_4,b_5；b_4,b_5,b_6；b_1,b_3,b_5；b_2,b_4,b_6.

（2）由题意得等差数列$\{b_n\}$的通项为$b_n=\sqrt{2}+2(n-1)$，假设存在三阶等比子数列

$b_{x+1},b_{y+1},b_{z+1}\ (0\leqslant x<y<z\leqslant n-1)$，则$b_{y+1}^2=b_{x+1}b_{z+1}$，即$\left(\sqrt{2}+2y\right)^2=\left(\sqrt{2}+2x\right)\left(\sqrt{2}+2z\right)$，化简得

$2\sqrt{2}(2y-x-z)+4\left(y^2-xz\right)=0$，所以$\begin{cases}2y=x+z,\\ y^2=xz,\end{cases}$消$y$得$\left(\dfrac{x+z}{2}\right)^2=xz$，即$(x-z)^2=0$，所以$x=z$与$0\leqslant x<y<z\leqslant n-1$矛盾，故假设不成立，因此数列$\{b_n\}$不存在三阶等比子数列.

（3）先求A的值

当n为奇数时，$A=(n-2)+(n-4)+\cdots+3+1=\dfrac{(n-1)\frac{n-1}{2}}{2}=\dfrac{(n-1)^2}{4}$；

当n为偶数时，$A=(n-2)+(n-4)+\cdots+4+2=\dfrac{n\times\frac{n-2}{2}}{2}=\dfrac{n(n-2)}{4}$，

所以$A=\begin{cases}\dfrac{(n-1)^2}{4},n=2k_1+1,\\ \dfrac{n(n-2)}{4},n=2k_1+2,\end{cases}\left(k_1\in\mathbf{N}^*\right)$.

再求B的值

当$n=3k_2\ \left(k_2\in\mathbf{N}^*\right)$时，$B=(n-3)+(n-6)+\cdots+3=\dfrac{n\times\frac{n-3}{3}}{2}=\dfrac{n(n-3)}{6}$，

当$n=3k_2+1$时，$B=(n-3)+(n-6)+\cdots+4+1=\dfrac{(n-2)\frac{n-1}{3}}{2}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{6}$，

当$n=3k_2+2$时，$B=(n-3)+(n-6)+\cdots+5+2=\dfrac{(n-1)\frac{n-2}{3}}{2}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{6}$，

所以$B=\begin{cases}\dfrac{n(n-3)}{6},n=3k_2,\\ \dfrac{(n-1)(n-2)}{6},n=3k_2+1,\\ \dfrac{(n-1)(n-2)}{6},n=3k_2+2,\end{cases}\left(k_2\in\mathbf{N}^*\right)$，

所以当$n=6k\ \left(k\in\mathbf{N}^*\right)$时，$\dfrac{B}{A}=\dfrac{\dfrac{n(n-3)}{6}}{\dfrac{n(n-2)}{4}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}=\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{-1}{n-2}\right)$，因为$f(x)=\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{-1}{x-2}\right)$

在$(1,+\infty)$上单调递增，所以此时$\dfrac{B}{A}\geqslant\dfrac{2\times3}{3\times4}=\dfrac{1}{2}$，即$A\leqslant2B$成立;

同理当$n=6k+1$时，$\dfrac{B}{A}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n-2}{n-1}\geqslant\dfrac{2\times5}{3\times6}=\dfrac{5}{9}>\dfrac{1}{2}$，即$A\leqslant2B$成立;

当$n=6k+2$时，$\dfrac{B}{A}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n-1}{n}\geqslant\dfrac{2\times7}{3\times8}=\dfrac{7}{12}>\dfrac{1}{2}$，即$A\leqslant2B$成立;

当$n=6k+3$时，$\dfrac{B}{A}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n(n-3)}{(n-1)^2}$，要证$A\leqslant2B$成立，只需证明$4\left(n^2-3n\right)\geqslant3\left(n^2-2n+1\right)$

$\Leftrightarrow n^2-6n-3\geqslant0$，因为$n=6k+3\ \left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，故$n^2-6n-3\geqslant24>0$，即$A\leqslant2B$成立;

当$n=6k-2$时，$\dfrac{B}{A}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n-1}{n}\geqslant\dfrac{2\times3}{3\times4}=\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}$，即$A\leqslant2B$成立;

当$n=6k-1$时，$\dfrac{B}{A}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n-2}{n-1}\geqslant\dfrac{2\times3}{3\times4}=\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}$，即$A\leqslant2B$成立，综上$A\leqslant2B$成立.

（注：本题第（2）问为教材习题）