

2024 学年杭州市第一学期高三年级教学质量检测

数 学

考生须知:

1. 本试卷分试题卷和答题卷两部分. 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.
2. 请用黑色字迹的钢笔或签字笔在答题卡指定的区域 (黑色边框) 内作答, 超出答题区域的作答无效!
3. 考试结束, 只需上交答题卡.

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是正确的. 请把正确的选项填涂在答题卡的相应位置.

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid y = \sqrt{1-x^2}\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$
2. 函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 0, \\ -x-1, & x < 0 \end{cases}$ 是
A. 奇函数 B. 偶函数
C. 既非奇函数也非偶函数 D. 既是奇函数也是偶函数
3. 已知直线 $y = 2x$ 是双曲线 $C: \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一条渐近线, 则 C 的离心率等于
A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $\sqrt{5}$
4. 将函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\varphi (0 < \varphi < 2\pi)$ 个单位, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 则“ $y = g(x)$ 是偶函数”是“ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 1)$, 若 $(t\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp (-2\mathbf{a} + t\mathbf{b})$, 则 $t =$
A. 1 或 $\frac{1}{2}$ B. -2 或 $\frac{1}{2}$ C. -1 或 2 D. -2 或 1
6. 设 $f(x) = e^x + \ln x$, 满足 $f(a)f(b)f(c) < 0 (0 < a < b < c)$. 若函数 $f(x)$ 存在零点 x_0 , 则
A. $x_0 < a$ B. $x_0 > a$ C. $x_0 < c$ D. $x_0 > c$

7. 已知 $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\lambda}{\cos 10^\circ} = 4$, 则 $\lambda =$

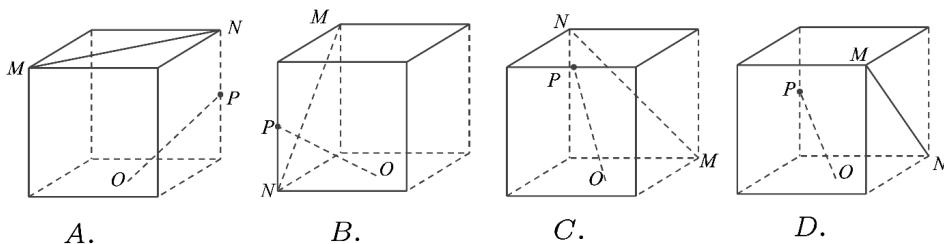
- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

8. 对 $\forall x \in [1, +\infty)$, 不等式 $((\ln ax)^2 - 1)(e^x - b) \geq 0$ 恒成立, 则

- A. 若 $a \in (0, \frac{1}{e})$, 则 $b \leq e$ B. 若 $a \in (0, \frac{1}{e})$, 则 $b > e$
C. 若 $a \in [\frac{1}{e}, e)$, 则 $a^b = e^e$ D. 若 $a \in [\frac{1}{e}, e)$, 则 $b^a = e^e$

二、选择题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共计 18 分。每小题给出的四个选项中, 有多项符合 题目要求。全部选对得 6 分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 如图, 在正方体中, O 为底面的中心, P 为所在棱的中点, M, N 为正方体的顶点. 则满足 $MN \perp OP$ 的是



10. 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 - ax (x \geq 0)$, 则

- A. 若 $f(x)_{\min} = f(1)$, 则 $a = 1$
B. 若 $f(x)_{\min} = f(1)$, 则 $a = -\frac{1}{3}$
C. 若 $a = 1$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减
D. 若 $a = -\frac{1}{3}$, 则 $f(x)$ 在 $(1, 3)$ 上单调递增

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $f(f(x) + yz) = x + f(y)f(z)$, 则

- A. $f(1) = 0$ B. $f[f(x)] = x$
C. $f(xy) = f(x)f(y)$ D. $f(x+y) = f(x)f(y)$

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 函数 $f(x) = \ln x$ 在点 $(e, 1)$ 处的切线的斜率等于 _____.

13. 已知复数 z_1, z_2 的实部和虚部都不为 0, 满足① $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 2$; ② $|z_1 z_2| = 2$. 则 $z_1 =$ _____, $z_2 =$ _____. (写出满足条件的一组 z_1 和 z_2)

14. 已知双曲线 C_1, C_2 都经过点 $(1, 1)$, 离心率分别记为 e_1, e_2 , 设双曲线 C_1, C_2 的渐近线分别为 $y = \pm k_1 x$ 和 $y = \pm k_2 x$. 若 $k_1 k_2 = 1$, 则 $\frac{e_1}{e_2} =$ _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 C - \sqrt{3} \sin B \sin C, 2 \cos B = \sin C$.

(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由;

(2) 若点 D 在 AB 边上, 且 $BD = 2AD$. 若 $CD = 2$, 求 $\triangle ACD$ 的面积.

16. (15 分)

在直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 M 在抛物线 C 上, 若 $\triangle OFM$ 的外接圆与抛物线 C 的准线相切, 且该圆的面积为 $\frac{9\pi}{64}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若点 $(-1, 1)$ 关于直线 $y = kx$ 对称的点在 C 上, 求 k 的值.

17. (15 分)

设随机变量 X 所有可能的取值为 $x_1, x_2, \dots, x_n, P(X = x_i) = p_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 且 $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. 定义事件 $X = x_i$ 的信息量为 $H_i = -\ln p_i$, 称 X 的平均信息量 $H(X) = -(p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2 + \dots + p_n \ln p_n)$ 为信息熵.

(1) 若 $n = 3, p_{k+1} = 2p_k (k = 1, 2)$, 求此时的信息熵;

(2) 最大熵原理: 对一个随机事件的概率分布进行预测时, 要使得信息熵最大. 信息熵最大就是事物可能的状态数最多, 复杂程度最大, 概率分布最均匀, 这才是风险最小 (最合理) 的决定. 证明: $H(X) \leq \ln n$, 并解释等号成立时的实际意义.

(参考不等式: 若 $f(x) = \ln x$, 则 $\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right)$)

18. (17 分)

已知函数 $f(x) = ax \ln x - x^3 - 1$.

(1) 若 $a = 1$, 求 $f'(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $0 \leq a \leq 3$, 求证: $f(x) < 0$;

(3) 若 $h(x) = \frac{f(x) + x^3 + 1}{a}$, $\exists x_1 \neq x_2$ 使得 $h(x_1) = h(x_2) = b$,

求证: $be + 1 < |x_1 - x_2| < b + 1$.

19. (17 分)

已知**正项有穷**数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_N (N \geq 3)$, 设 $T = \left\{ x \mid x = \frac{a_j}{a_i}, 1 \leq i < j \leq N \right\}$, 记 T 的元素个数为 $P(T)$.

(1) 若数列 $A: 1, 2, 4, 16$, 求集合 T , 并写出 $P(T)$ 的值;

(2) 若 A 是递增数列或递减数列, 求证: “ $P(T) = N - 1$ ”的充要条件是“ A 为等比数列”;

(3) 若 $N = 2n + 1$, 数列 A 由 $2, 4, 8, \dots, 2^n, 4^n$ 这 $n + 1$ 个数组成, 且这 $n + 1$ 个数在数列 A 中每个至少出现一次, 求 $P(T)$ 的取值个数.