嘉兴市2024年高三基础测试

数　学

考生注意：

1．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸上规定的位置．

2．答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸上的相应位置规范作答，在本试题卷上的作答一律无效．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $U=\{x|1<x<9，x\in\mathbf{N}\}$，$\complement_U A=\{4,5,6\}$，则

A．$2\in A$　　B．$3\notin A$　　C．$6\in A$　　D．$7\notin A$

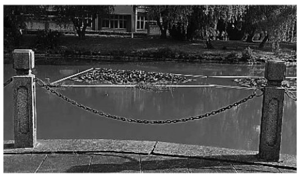
2．在复平面内，复数 z_1 对应的点和复数 $z_2=1+2\mathrm{i}$ 对应的点关于实轴对称，则 $z_1z_2=$

A．$-3+4\mathrm{i}$　　B．$-3-4\mathrm{i}$　　C．5　　D．$\sqrt{5}$

3．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(\lambda,-1)$，$\boldsymbol{c}=(\mu,-1)$，若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\parallel\boldsymbol{b}$，则 $\lambda+\mu=$

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．1

4．嘉兴河流众多，许多河边设有如图所示的护栏，护栏与护栏之间用一条铁链相连．数学中把这种两端固定的一条均匀、柔软的链条，在重力的作用下所具有的曲线形状称为悬链线 (Catenary)．已知函数 $f(x)=\frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)(a>0)$ 的部分图象与悬链线类似，则下列说法正确的是



A．$f(x)$ 为奇函数　　B．$f(x)$ 的最大值是 a

C．$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增　　D．方程 $f(x)=2a$ 有 2 个实数解

5．已知 $\sin(\alpha+\beta)=3\cos(\alpha-\beta)$，$\tan\alpha\tan\beta=-\frac{1}{5}$，则 $\tan\alpha+\tan\beta=$

A．$-\frac{1}{5}$　　B．-5　　C．$\frac{12}{5}$　　D．12

6．已知四面体 $P-ABC$ 的每条棱长都为 2，若球 O 与它的每条棱都相切，则球 O 的体积为

A．$\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$　　C．$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$　　D．2π

7．将数字1，2，3，4，5，6，7，8，9随机填入 3×3 的正方形格子中，则每一横行、每一竖列以及两条斜对角线上的三个数字之和都相等的概率为

A．$\frac{8}{9!}$　　B．$\frac{12}{9!}$　　C．$\frac{24}{9!}$　　D．$\frac{48}{9!}$

8．《测圆海镜》是金元之际李冶所著中国古代数学著作，这是中国古代论述容圆的一部专著，也是论述天元术的代表作．天元术与现代数学中列方程的方法基本一致，先立“天元一”为……，相当于“设 x 为……”，再根据问题的已知条件列出两个相等的多项式，最后通过合并同类项得到方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$．设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\ (n\in\mathbf{N})$，若 $f(2)=5\times2^{n+1}-3n-8$，则 $f(1)=$

A．$\frac{3n^2+4n}{2}$　　B．$\frac{3n^2+11n}{2}$　　C．$\frac{3n^2+5n+4}{2}$　　D．$\frac{3n^2+7n+4}{2}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分。

9．下列说法正确的是

A．样本数据20，19，17，16，22，24，26的下四分位数是17

B．在比例分配的分层随机抽样中，若第一层的样本量为 10，平均值为 9，第二层的样本量 为 20，平均值为 12，则所抽样本的平均值为 11

C．若随机变量 $X\sim B\left(5,\frac{1}{3}\right)$，则 $P(X=2)=\frac{8}{243}$

D．若随机变量 $X\sim N(4,\sigma^2)(\sigma>0)$，若 $P(x\geqslant2)=0.8$，则 $P(x>6)=0.2$

10．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别是 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，以 F_1F_2 为直径的圆与 C 在第一象限交于点 P，延长线段 PF_2 交 C 于点 Q．若 $|PF_2|=2|QF_2|$，则

A．$|QF_2|+|PF_1|=|QF_1|$　　B．$\triangle PQF_1$ 的面积为 $\frac{4a^2}{3}$

C．椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D．直线 QF_1 的斜率为 $-\frac{2}{11}$

11．定义在$[0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$f(x)=f\left(\dfrac{3ax}{x^2+a}\right)$，其值域是$M$．若对于任何满足上述条件的$f(x)$都有$\{y|y=f(x),x\in[0,1]\}=M$，则实数$a$的取值必可以为

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．1

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12．若$(x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则$a_2=$________．

13．已知直线$y=2x-m$与圆$C:(x-m)^2+y^2=4$交于A，B两点，写出满足“$|AB|=2\sqrt{3}$”的实数m的一个值：________．

14．在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2$，$AD=AA_1=1$，点M满足$\overrightarrow{A_1M}=\lambda\overrightarrow{A_1C_1}\ (0\leqslant\lambda\leqslant1)$，平面$MAB$与底面$ABCD$的夹角为$\alpha$，平面$MBC$与底面$ABCD$的夹角为$\beta$，当$\alpha+\beta$最小时，$\lambda=$________．

四、解答题：本题共5小题，共77分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$(b+c-a)(b+c+a)=bc$．

（1）求A；

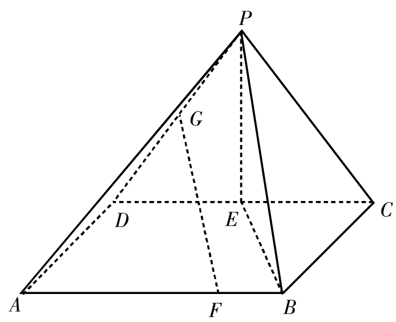
（2）若D为BC边上一点，$\angle BAD=3\angle CAD$，$AC=4$，$AD=\sqrt{3}$，求$\sin B$．

16．（15分）

如图，已知四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$是边长为6的正方形，侧面$PCD\perp$底面$ABCD$，$PC=PD=5$，点E，G分别是DC，DP的中点，点F在棱AB上且$AF=3FB$．

（1）求证：$FG//$平面BPE；

（2）求直线FG与平面PBC所成的角的正弦值．



17．（15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=2x-a\ln x\ \left(a\in\mathbf{R}\right)$，$g\left(x\right)=-x^2-x$．

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若存在 $x\in\left(1,+\infty\right)$，使得函数 $f\left(x\right)\leqslant g\left(x\right)$ 成立，求证：$a>5\mathrm{e}$．

参考数据：$7.3<\mathrm{e}^2<7.4$，$20<\mathrm{e}^3<20.1$．

18．（17 分）

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $M\left(t,2\right)$ 是 C 上的一点，且 $\left|MF\right|=2$．

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）设点 $A\left(x_1,\ y_1\right)$，$B\left(x_2,\ y_2\right)$（其中 $x_1<x_2$）是 C 上异于 M 的两点，$\angle AMB$ 的角平分线与 x 轴垂直，N 为线段 AB 的中点．

（ⅰ）求证：点 N 在定直线上；

（ⅱ）若 $\triangle MAB$ 的面积为 6，求点 A 的坐标．

19．（17 分）

当 n_1，n_2，$\cdots$，$n_k\in\mathbf{N}^*$，且 $n_1<n_2<\cdots<n_k$ 时，我们把 a_{n_1}，a_{n_2}，$\cdots$，a_{n_k} 叫做数列 $\{a_n\}$ 的 k 阶子数列，若 a_{n_1}，a_{n_2}，$\cdots$，a_{n_k} 成等差（等比）数列，则称 a_{n_1}，a_{n_2}，$\cdots$，a_{n_k} 为数列 $\{a_n\}$ 的 k 阶等差（等比）子数列．已知项数为 n（$n\geqslant4$，且 $n\in\mathbf{N}^*$）的等差数列 $\{b_n\}$ 的首项 $b_1=\sqrt{2}$，公差 $d=2$．

（1）写出数列 b_1，b_2，$\cdots$，b_6 的所有 3 阶等差子数列；

（2）数列 $\{b_n\}$ 中是否存在 3 阶等比子数列？若存在，请至少写出一个；若不存在，请说明理由；

（3）记数列 $\{b_n\}$ 的 3 阶和 4 阶等差子数列个数分别为 A，B，求证：$A\leqslant2B$．